IREM de Toulouse

Première Manche

Réponses et prolongements

Rallye Mathématiques Sans frontière Midi-Pyrénées

IUFM Midi-Pyrénées

Mardi 27 novembre 2012

Cycle 3

1) Quelle année ! 10 points

Le nombre 2012 est un nombre de 4 chiffres. Si ses chiffres étaient des nombres, leur somme serait égale à 5 et leur produit serait égal à 0. C'est aussi vrai pour les nombres 1400 et 1004.

Combien existe-t-il, de nombres de quatre chiffres inférieurs à 2000 pour lesquels on peut dire la même chose ?

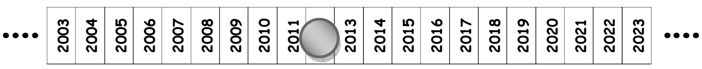
Réponse : Les nombres cherchés sont inférieurs à 2000 et possèdent quatre chiffres ; donc le chiffre des unités de mille est 1. Le produit des nombres étant égal à 0, un des chiffres est 0. La somme des quatre nombres (dont deux sont 1 et 0) étant égale à 5, on cherche donc les décompositions additives de 4 (= 5–1–0) avec deux termes. On trouve : 4+0 ; 3+1 ; 2+2.

On peut alors construire les nombres recherchés : 1400 ; 1040 ; 1004 ; 1310 ; 1130 ; 1301 ; 1103 ; 1031 ; 1013 ; 1220 ; 1202 ; 1022

Il existe donc **12 nombres** de quatre chiffres inférieurs à 2000 pour lesquels on peut dire la même chose.

Prolongement : On peut se poser la même question en imposant cette fois que le produit des nombres soit non nul.

2) L'année de M. Latouche 12 points



Le pion de M. Latouche est sur une piste de jeu dont les cases sont numérotées de 2000 à 2050, son pion est sur la case 2012.

Chaque carte A qu'il tire lui fait avancer son pion de 12 cases, et chaque carte B, le fait reculer de 7 cases.

Il souhaite amener son pion sur la case 2013. Quelle suite de cartes permettrait de le faire ?

Réponse : On remarque qu'il faudra tirer davantage de cartes B que de cartes A si on veut n'avancer que d'une case. On peut dresser la liste des multiples de 12 puis celle des multiples de 7 et observer dans cette liste deux multiples qui diffèrent de 1.

On trouve **3 cartes A et 5 cartes B.**

Autre démarche : avec les cartes A on avance d'un multiple de 12 et avec les cartes B, on recule d'un multiple de 7 ; pour passer de la case 2012 à la case 2013, il faut donc avancer d'une case. On cherche donc un multiple de 12 dont le prédécesseur est un multiple de 7 ; en testant successivement les premiers multiples de 12 (0 ; 12 ; 24 ; 36…) le premier qui satisfait les conditions est 36 (36 = 3×12 et 35 = 5×7) soit 3 cartes A et 5 cartes B.

Remarque : ce n'est pas la seule solution en continuant on trouverait (10 cartes A et 17 cartes B) ou (17 cartes A et 29 cartes B)...

Prolongements : Existe-il plusieurs solutions ?

Même question pour amener le pion sur la case 2011.

Si la carte B le faisait reculer de 8 cases, M. Latouche pourrait-il amener son pion sur la case 2013 ?

3) De cubes à cubes 14 points

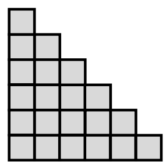
En assemblant 8 petits cubes identiques, j'ai formé un cube 2 fois plus haut que le petit cube initial. Je voudrais maintenant obtenir un cube 2 fois plus haut que celui que je viens de former.

Combien de petits cubes me faut-il en plus ?

Réponse : la hauteur du cube cherché est donc le quadruple de la hauteur du cube initial. Il faut donc 4×4×4 cubes, soit 64 cubes. Il me faut donc **56 cubes** en plus des huit déjà utilisés.

Prolongement : même question avec un cube 10 fois plus haut (vers une initiation à l'utilisation d'unités métriques de volume).

4) Karine empile des carrés 16 points



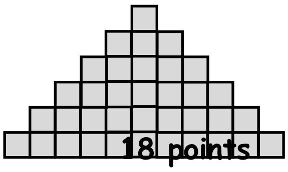
Karine a assemblé des carrés identiques pour former une construction de 16 lignes, (par exemple la figure dessinée ci-contre correspond à une construction de 6 lignes : un carré pour la ligne la plus haute, deux pour la précédente, etc.).

Son petit frère a démonté la construction de Karine et a utilisé tous ses carrés pour reconstituer un rectangle.

Combien de carrés y avait-il en longueur et en largeur sur le rectangle sachant que la largeur est la plus proche possible de la longueur ?

Réponse : Pour construire les 16 étages, Karine a utilisé 1+2+3+4+…+16 carrés. On peut calculer directement cette somme (136) ou l'écrire différemment en groupant astucieusement les termes : (1+16) + (2+15) + (3+14) + …+ (8+9). On obtient ainsi le nombre 17 huit fois. Karine a donc utilisé 17×8 carrés. Comme produit de deux nombres, ce nombre peut s'écrire : 17×8, 34×4, 68×2, 136×1. Comme la largeur doit être la plus proche possible de la longueur, le petit frère de Karine a disposé 17 carrés en longueur et 8 carrés en largeur.

Prolongement : même question avec un assemblage comme ci-contre.



5) L'ordre de Léonie 18 points

Léonie a écrit dans l'ordre croissant tous les nombres entiers s'écrivant avec 5 chiffres différents comme 19524 ou 72038.

Le 1er qu'elle a écrit est 10234 quel est le 56ème ?

Réponse :

Les premiers nombres vont avoir 1 au chiffre des dizaines de milliers et 0 au chiffre des milliers.
Au chiffre des centaines, on a alors le choix entre 8 possibilités : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9.
Au chiffre des dizaines, il y a 7 possibilités (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 puis 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 etc.).
Enfin, au chiffre des unités, il y a 6 possibilités.
On a donc 7x6=42 nombres qui ont 1 comme chiffre des dizaines de milliers, 0 comme chiffre des milliers et 2 comme chiffre des unités.

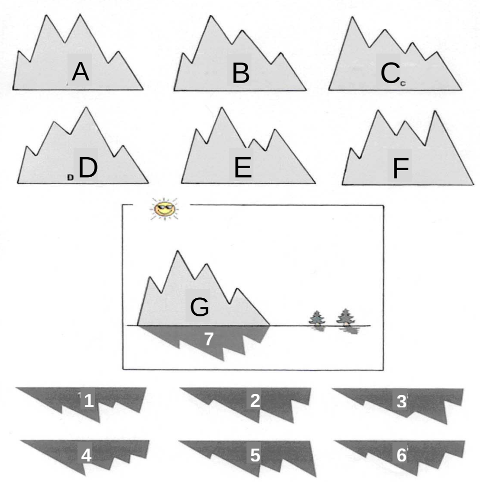
Le 56eme est 10354.

Léonie a écrit
10234 ; 10235 ; 10236 ; 10237 ; 10238 ; 10239 ; 10243 ; 10245 ; 10246 ; 10247 ; 10248 ; 10249 ; 10253 ; 10254 ; 10256 ; 10257 ; 10258 ; 10259 ; 10263 ; 10264 ; 10265 ; 10267 ; 10268 ; 10269 ; 10273 ; 10274 ; 10275 ; 10276 ; 10278 ; 10279 ; 10283 ; 10284 ; 10285 ; 10286 ; 10287 ; 10289 ; 10293 ; 10294 ; 10295 ; 10296 ; 10297 ; 10298 ; 10324 ; 10325 ; 10326 ; 10327 ; 10328 ; 10329 ; 10342 ; 10345 ; 10346 ; 10347 ; 10348 ; 10349 ; 10352 ; 10354…
Le 56ème est donc **10354**.

Prolongement : même question en n'utilisant que les chiffres 0, 1, 2, 3, et 4 (rép. 31042).

6) Les ombres 20 points

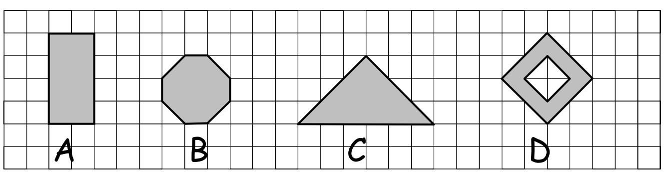
Associe son ombre à chaque montagne (par exemple, l'ombre 7 est associée à la montagne G).



Réponse : A↔2 ; B↔6 ; C↔4 ; D↔3 ; E↔1 ; F↔5

7) Les pots de Néness 22 points

Néness a peint les quatre figures A, B, C et D sur un mur, chacune d'une seule couleur et toutes avec une couche de peinture de la même épaisseur.



Il a utilisé des pots de peinture de même contenance : 18 pots de rouge pour une des figures, 24 pots de bleu pour une autre, 27 pots de jaune pour une troisième et des pots de noir pour la figure qui reste. Combien de pots de noir a-t-il utilisé ?

Réponse :

Surface	Mesure de l'aire, exprimée en carreaux
A	8
B	7
C	9
D	6

On suppose que Néness a utilisé la totalité de la peinture de chaque pot.
18 < 24 < 27, Néness ne peut avoir utilisé les 18 pots de rouge que pour la surface D ou la surface B (l'une des deux plus petites).
Si Néness a utilisé 18 pots de rouge pour la surface D alors il en a utilisé 18+9 (18 plus la moitié de 18 puisque 9= 6+3) soit 27 pots de peinture (jaune) pour la surface C et 18+3 (18 plus le tiers de 18 puisque 8= 6+2) soit 21 pots pour la surface B. Il utilise donc 3 pots par carreau soit 24 pots (de bleu) pour la surface A. Il a donc utilisé **21 pots de noir** pour peindre la surface B.
Si Néness a utilisé les 18 pots de rouge pour la surface B, on n'a plus proportionnalité entre surface à peindre et nombre de pots utilisés. L'écart des aires des surfaces à peindre est constant (1 carreau), l'écart en nombre de pots doit aussi être constant ce qui n'est pas possible dans ce cas.

Prolongement en CM : proposer d'autres surfaces plus complexes afin de travailler simultanément les aires et la proportionnalité.

8) Coucou bip-bip 24 points

J'ai un coucou qui fait des séries de bips (brefs et à intervalles réguliers) toutes les heures. À 3 heures, il fait 3 bips en 6 secondes.

Combien lui faut-il de temps pour faire les 6 bips de 6 heures ?

Combien lui faut-il de temps pour faire les 6 bips de 6 heures ?

Réponse :

À trois heures

Bip1—— Bip2—— Bip3

Il s'écoule donc 3 secondes entre deux bips successifs (il n'y a que deux intervalles de temps entre les trois bips).

À six heures,

Bip1 —— Bip2—— Bip3 —— Bip4——Bip5——Bip6

Dans ces cinq intervalles de temps, il s'écoulera 5×3 s soit **15 s**.

Prolongements : divers problèmes de piquets et intervalles sur des lignes ouvertes ou fermées (clôtures…).

Combien y a-t-il de nombres entiers entre 67 et 152 ?