IREM de Toulouse

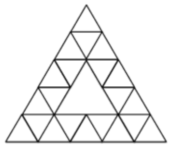
IUFM Midi-Pyrénées

Troisième Manche
Réponses et prolongements

Mardi 19 mars 2013

Cycle 3

1) Tristan et Lola 10 points



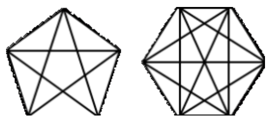
Dans la figure ci-contre, Lola compte les losanges.

Combien en trouve-t-elle ?

Réponse : Lola a compté **21 losanges**.

Prolongement : et si on comptait les triangles ?

2) Melchior 12 points



Melchior a dessiné plusieurs pentagones et plusieurs hexagones et leurs diagonales. En tout, il a compté 89 diagonales.

Combien de polygones de chaque sorte a-t-il dessinés ?

Réponse : pour un pentagone, on obtient 5 diagonales et pour un hexagone, on obtient 9 diagonales (pour les dénombrer, penser à les colorier). En tout, Melchior a compté 89 diagonales.
On cherche donc à écrire 89 sous la forme de la somme d'un multiple de 9 et d'un multiple de 5.
Il y a deux solutions : **1 hexagone et 16 pentagones ou 6 hexagones et 7 pentagones**.
Prolongement : Et s'il avait utilisé un pentagone et un octogone, aurait-il pu compter 89 diagonales ?

3) Il y a encore du travail ! 14 points

Le petit Eddy s'entraîne progressivement pour sa prochaine course cycliste. Il fait une petite sortie le lundi, puis chaque jour jusqu'au vendredi compris, il double la distance parcourue la veille. Le samedi, il réduit de moitié la distance parcourue le vendredi et se repose le dimanche. En une semaine, Eddy a fait au total 195 km. Quelle distance a-t-il parcourue mercredi ?

Réponse : Si on considère le nombre de km parcourus le lundi, on peut déduire qu'Eddy aura parcouru (1+2+4+8+16+8) fois soit 39 fois ce nombre de km. Comme on sait qu'en tout il en a parcouru 195, c'est donc que le lundi il en a parcouru (195 : 39), soit 5 km.
On en déduit que le mercredi, **il a parcouru 20 km**.
Autre solution : On peut procéder par essais et ajustements :

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche	Total
km	10	20	40	80	160	80	0	390
km	5	10	20	40	80	40	0	195

Prolongement :
Bernard, lui, ne fait des sorties vélo que le dimanche. Chaque dimanche, il parcourt 5 km de plus que le dimanche précédent et ceci pendant 8 dimanches. Sachant qu'il a parcouru en tout 220 km, combien de kilomètres a-t-il parcouru le dernier dimanche ?

4) Judomaths 16 points

Lors d'un entrainement de judo, 2 combats ont lieu en même temps. Ils opposent 4 judokas : Justine, Clément, Teddy et Mélissa qui portent des ceintures de couleurs différentes.

- Teddy ne rencontre pas Clément
- Le judoka de ceinture jaune ne rencontre pas le judoka de ceinture orange
- Justine affronte un adversaire de ceinture noire
- La ceinture verte est celle d'une fille
- Clément affronte un adversaire de ceinture orange

Quelles sont les couleurs des ceintures de chacun de ces 4 judokas ?

Réponse : la ceinture verte est celle d'une fille, donc Clément n'est pas ceinture verte.
Clément affronte un adversaire de ceinture orange, donc Clément n'est pas ceinture orange.

Le judoka de ceinture jaune ne rencontre pas le judoka de ceinture orange, et Clément affronte un adversaire de ceinture orange, donc Clément n'est pas ceinture jaune.

Clément est donc ceinture noire.

Justine affronte un adversaire de ceinture noire et Clément affronte un adversaire de ceinture orange, donc **Justine est ceinture orange**.

La ceinture verte est celle d'une fille, donc **Mélissa est ceinture verte**.

Teddy est donc ceinture jaune.
Autre solution : on peut commencer par lister tous les combats possibles.

	Cas 1	Cas 2	~~Cas 3~~
Combat 1	JC	JT	~~JM~~
Combat 2	TM	CM	~~CT~~

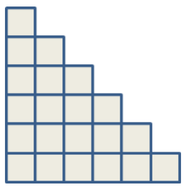
Le cas 3 est impossible (CT). Si Justine est ceinture verte, le cas 1 est impossible (C rencontre une ceinture orange), de même que le cas 2 (une ceinture jaune rencontre une ceinture orange). Donc Mélissa est ceinture verte.
Le cas 2 est impossible (C rencontre une ceinture orange) ; dans le cas 1, Justine rencontre Clément donc Clément est ceinture noire et Justine ceinture orange. Teddy est alors ceinture Jaune.
Prolongement :
Cet exercice rentre dans la famille des jeux de portraits, qui peuvent aussi porter sur les figures géométriques, le positionnement dans l'espace, les nombres… avec des informations positives ou négatives à traiter.

5) ABACAB **18 points**

A, B et C représentent toujours le même chiffre et chacun un chiffre différent. On sait que AA + BB + CC = ABC.
Combien vaut B × BB ?

Réponse : Pour que A + B + C soit un nombre qui ait C comme chiffre des unités, il faut que A + B = 10. A + B + C (pour les dizaines) est un nombre à deux chiffres AB donc A = 1 ou A = 2. Si A = 2 alors B = 8 et C doit être 9 pour que A + B + C soit supérieur ou égal à 20. Dans ces conditions, l'égalité n'est pas respectée.
On a donc A = 1, B = 9, C = 8 puis **B × BB = 891**.
Prolongement : dans les mêmes conditions, est-il possible de trouver A, B et C tels que AAA + BBB + CCC = ABC ? Et AAA + BBB + CCC = ABBC ?

6) Et encore une pyramide **20 points**



Gaspar a assemblé des cubes pour former une construction de 32 étages, comme indiqué ci-contre (seuls les 6 étages du haut ont été représentés)

Balthazar a démonté sa construction et a assemblé les cubes en rectangle. Rectangle dont la largeur est la plus proche possible de la longueur.

Combien de cubes y avait-il en longueur et combien en largeur ?

Réponse : On remarque qu'à chaque étage, on a un cube de plus qu'à l'étage du dessus. Il y a en tout 1 + 2 + 3 + 4 +….+ 30 + 31 +32, soit 528 cubes. Ce calcul peut être long et fastidieux, il faut savoir s'organiser et se partager le travail dans la classe.

Si on dispose les cubes en rectangles, le nombre de cubes sera donné par le produit du nombre de cubes en longueur par le nombre de cubes en largeur.

On va ensuite tâtonner pour décomposer 528 en un produit de deux nombres :
$528 = 4 \times 132 = 16 \times 33 = 48 \times 11 = 24 \times 22$

C'est dans la dernière décomposition qu'on trouve des nombres très proches l'un de l'autre, on ne peut pas trouver plus proches puisque 528 ne peut pas être égal à 23x24, ni à 23x22, ni à 23x23.

Il y avait donc **24 cubes en longueur et 22 cubes en largeur**.

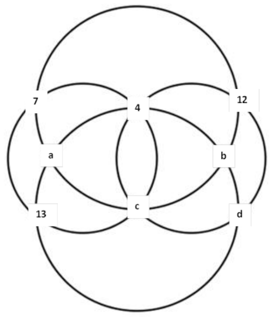
Prolongement : le problème du plus grand produit. Parmi les décompositions additives d'un nombre, chercher celles dont le produit des termes est le plus grand (on peut choisir 10 puis 14).

7) Que de cercles ! **22 points**

On a inscrit 8 nombres aux intersections des cercles de la figure ci-dessous. Quatre de ces nombres sont connus, les autres ont été remplacés par des lettres a, b, c et d.

La somme des nombres est la même sur chacun des 4 cercles.

Quelle est cette somme ?

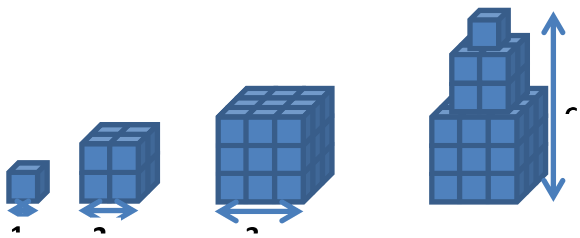


Réponse : si on considère les deux petits cercles, 4 nombres sont présents sur chacun. Or, le nombre 4 et celui remplacé par la lettre c sont sur les deux cercles. La somme de 12 et du nombre remplacé par la lettre d doit être la même que 7 + 13. Donc d = 8. Avec le même raisonnement sur les grands cercles, la somme de 7, 12 et du nombre remplacé par la lettre c doit être égale à 13 + 4 + 8. Donc c = 6. On en déduit que **la somme des nombres sur chaque cercle est 30**.
Remarque : il n'est pas nécessaire de connaître la valeur de a et b, on ne peut d'ailleurs connaître que leur somme, 5.
Prolongement : carré magique 3×3. Dans une grille carrée de 9 cases, il s'agit de placer les nombres de 1 à 9 (utilisés une seule fois) de telle manière que la somme des 3 nombres écrits sur chacune des trois lignes, des trois colonnes et des deux diagonales soit chaque fois la même. On peut donner l'indication de chercher d'abord la somme.

8) Tours **24 points**

Avec des cubes de 1 cm de côté, on a fabriqué des cubes de toutes les tailles, que l'on en a ensuite empilés, comme indiqué ci-dessous, pour former une tour contenant un total de 441 petits cubes de 1 cm de côté.

Quelle est la hauteur de la tour que l'on a obtenue ?



Pour chaque gros cube, le nombre de petits cubes est égal au nombre de cube sur un côté multiplié par lui-même en tout 3 fois.

On va additionner jusqu'à ce qu'on trouve 441 :

1 + 2x2x2 + 3x3x3 + 4x4x4 = 100

100 + 5x5x5 + 6x6x6 = 441.

La hauteur de la tour est donc 21 cm (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21).

Cet exercice est à relier à l'exercice 6

Prolongement : si on regarde la pyramide ainsi obtenue dans toutes les directions, y compris de dessus (mais pas de dessous), combien voit-on de carrés entiers de 1cm de côté ?