IREM de Toulouse

Première Manche : réponses et prolongements

ESPE Académie de Toulouse Midi-Pyrénées

Mardi 25 novembre 2014

Cycle 3

1) Des bouchons en pagaille 10 points

Réponse : Il faut donc dénombrer les paquets de 10. On en trouve 320+2800+59+1 soit 3180. On pourra donc gagner **3180 cartes**.

Prolongement : Et si on changeait les règles en proposant de gagner une carte pour chaque lot de 100 bouchons ?

Pour prolonger ce travail sur la numération, on pourra consulter le site de Frederick Tempier : http://numerationdecimale.free.fr/

2) Petit Gauss 12 points

Réponse : Le premier nombre impair est 1=2×1-1, le deuxième nombre impair est 3=2×2-1, le troisième nombre impair est 5=2×3-1, … Le cinquante-troisième nombre impair est 2×53-1=105. On nous demande donc de calculer la somme 1+3+5+7+....+103+105. Le grand nombre de termes nous invite à organiser nos calculs. On observe qu'en associant 1 et 105, 3 et 103, 5 et 101, on trouve à chaque fois 106. On pourra ainsi associer les nombres par deux jusqu'à 51 et 55, 53 restant seul car le nombre de termes de cette somme est lui-même impair. La somme des 53 premiers nombres impairs est donc 106×26+53 soit **2809**.

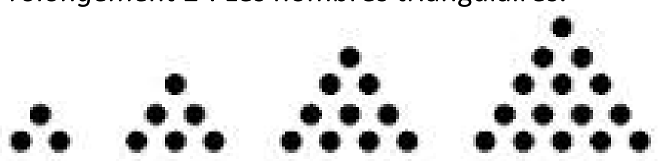
Prolongement 1 : La somme des nombres impairs consécutifs est un carré parfait.

1+3=2×2 ; 1+3+5=3×3 ; 1+3+7+9=4×4 ; …

Pour une « preuve sans mot voir » http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/LAVALISE/Preuvessansmot/impairs/impairs.htm .

Quel est le nombre qui multiplié par lui-même est égal à 2809 ?

Prolongement 2 : Les nombres triangulaires.



1+2=3 1+2+3=6 1+2+3+4=10 1+2+3+4+5=15

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), surnommé le « prince des mathématiciens » fût un génie précoce. Il est âgé de seulement 9 ans lorsque son maître d'école, croyant occuper pendant un long moment ses élèves un peu turbulents, demande à ceux-ci de calculer la somme 1+2+…+100. Le petit Gauss mit à mal la stratégie de son maître en calculant mentalement et rapidement cette somme après avoir eu l'idée d'additionner par paire les nombres extrêmes.

3) Oh, la vache ! 14 points

Réponse : une semaine de 7 jours permet à une vache « normale » de donner 7×10 L soit 70 L de lait. Mélody quant à elle donnera moins de 70 L. On recherche donc le multiple de 70 compris entre 810 et 880. On peut pour cela l'approcher par tâtonnement ou utiliser la division euclidienne. 880 = 70×12+40. Le vacher possède donc 12 vaches « normales » et Mélody **soit 13 vaches en tout**. De plus, Mélody a donné 40 L de lait, elle a donc aimé la musique pendant **4 jours**.

Prolongement : dans les mêmes conditions, chaque vache peut-elle donner 15 L par jour ? 20 L par jour ?

4) Nombre pensé… 16 points

Réponse: on peut essayer en choisissant différents nombres mais la procédure la plus efficace consiste à remonter la chaîne de calculs à l'envers autant que possible :

Partant de 64, on va obtenir le nombre de départ en le multipliant par 3, en ajoutant 4 et en cherchant le nombre qui multiplié par lui-même donne ce nombre obtenu.

(64×3)+4=196.

Par essais successifs, on trouve le nombre cherché **14.**

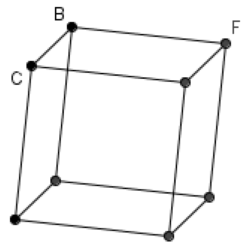
Prolongement : voir les activités « boîte noire » dans Ermel (Cycle 3, Ed Hatier).

Première Manche : réponses et prolongements

5) Vers les sommets 18 points

Réponse: le point d'interrogation est le point extrémité de la diagonale du cube passant par B. **C'est donc le point H.**

Prolongement :



Si le cube initial a tourné, est-il possible de retrouver cette configuration ?

6) Puzzle coloré 20 points

Réponse : Les pièces verte/bleu, et rouge/jaune occupent les zones en diagonale (respectivement 1/3 et 2/4 ou l'inverse) puisqu'elles ne se touchent pas. La pièce noire est donc dans la zone 5.

La pièce jaune est dans la zone 2 ou 3.

Si la couleur jaune est dans la zone 2, la rouge est dans la zone 4, la zone 1 peut être bleue ou verte.

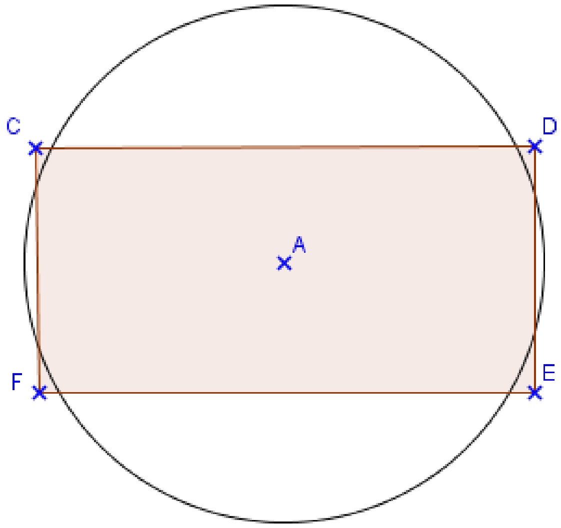
Si la couleur jaune est dans la zone 3, la zone 1 est rouge.

En conclusion, **la zone 1 est de couleur bleue, verte ou rouge.**

Prolongement : On peut continuer à exercer son esprit logique en résolvant « Le basket grec » de la manche 3 du Rallye 2012.

7) Intersections 22 points

Réponse : une droite et un cercle peuvent avoir au maximum deux points en commun. Comme un rectangle comporte quatre côtés, un cercle et un rectangle peuvent avoir **au maximum 8 points en commun**. C'est le cas dans la figure ci-dessous :



Le centre du cercle est « proche » de celui du rectangle, c'est à dire du point d'intersection de ses diagonales, et son rayon est « un peu plus petit » qu'une demi-diagonale.

Prolongement 1 : Construire un rectangle et deux cercles de sorte que la figure obtenue ait un maximum de points d'intersection.

Prolongement 2 : Tracer un cercle, le plus grand possible, à l'intérieur d'un losange de côté 9 cm et de petite diagonale 6 cm.

8) Empilements 24 points

Réponse : observons comment dénombrer les cubes :

cas 1 : 4+4×(2+1) ;

cas 2 : 5+4×(3+2+1) ;

cas 3 : 6+4×(4+3+2+1)

Dans le cas d'un empilement avec 10 cubes dans la colonne centrale, on obtiendrait :

10+4×(8+7+6+5+4+3+2+1) **soit 154 cubes.**

Prolongement : Pour continuer à dénombrer des cubes dans l'espace, on peut se replonger dans la deuxième manche de 2008, « la pyramide ».