Rallye mathématique sans frontière Midi-Pyrénées

Cycle 2 : deuxième manche

Jeudi 24 janvier 2019

1) Le petit poucet.....2 ✸

Réponse : **il pose le dernier caillou sur la 10e marche**.

Il faut itérer la somme des premiers entiers jusqu'à la première valeur supérieure ou égale à 55.
Ainsi, on calcule : 1+2=3 ; 1+2+3=6 ; 1+2+3+4=10 ; 1+2+3+4+5=15 ; 1+2+3+4+5+6=21 ; 1+2+3+4+5+6+7=28 ; 1+2+3+4+5+6+7+8=36 ; 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 ; 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55.
Avec ce dernier calcul, on peut conclure que 55 cailloux ont été posés jusqu'à la dixième marche.

Remarques :

L'exploitation de cet exercice permet de montrer aux élèves que les différents types de calculs (instrumenté, mental, en ligne, en appui sur la droite ou la bande numérique, sur du matériel de numération, sur des schémas voire des dessins…) n'ont pas la même efficience pour aboutir à la solution, et donc qu'il leur revient de choisir le type de calcul le plus pertinent compte tenu du calcul à effectuer.

On pourra insister sur la pertinence de valider un résultat par le collectif (plusieurs élèves effectuant le même calcul) mais surtout en utilisant des méthodes différentes.

Lors du retour sur les méthodes de calcul mental ou en ligne, il est judicieux de faire remarquer aux élèves que le calcul d'une somme peut être plus efficient en regroupant judicieusement les termes, notamment en mobilisant les compléments à 10. Ainsi, on peut remarquer que dans la somme des dix premiers entiers, on peut regrouper des nombres pour faciliter le calcul :
1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=(1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6)=11+11+11+11+11=5×11=55
Ou 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=(1+9)+(2+8)+(3+7)+(1+9)+10+5=10+10+10+10+10+5

La résolution mathématique de ce problème (hors de portée bien sûr d'un élève de l'école primaire) consiste à utiliser la formule permettant de calculer la somme des n premiers entiers naturels : $\frac{n(n+1)}{2}$. Ainsi, on cherche n tel que $\frac{n(n+1)}{2} \geq 55$ soit $n(n+1) \geq 110$ c'est-à-dire $n(n+1) \geq 10 \times 11$ et donc $n \geq 10$. Cette formule provient de la nature des nombres intervenant dans la somme à effectuer.

Prolongement :

On peut augmenter le nombre de cailloux et convoquer ainsi de nouveaux calculs, dont l'organisation simplifie la tâche. On peut également demander d'estimer si, pour 20 marches, le nombre de cailloux sera doublé ou non. On anticipe ainsi la notion de proportionnalité, abordée au cycle 3. En l'occurrence, le nombre de cailloux n'est pas proportionnel au nombre de marches.

2) Le bon ordre .....4 ✸

Réponse : **le nombre 2 était écrit deux fois**.

Les nombres de la liste sont :

3	3	>	2	9	>	2	4	>	1	8	

Rallye mathématique sans frontière Midi-Pyrénées

Cycle 2 : deuxième manche

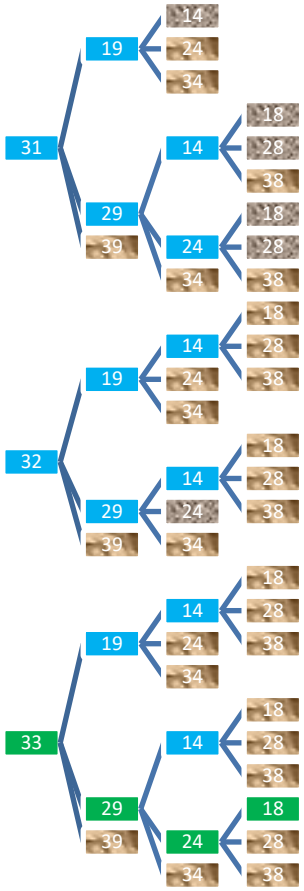
Jeudi 24 janvier 2019

Méthode par tâtonnements :
On peut placer les nombres au hasard (avec un jeu d'étiquettes, chacun des nombres 1, 2 et 3 pouvant apparaissaître plusieurs fois) puis les déplacer afin de tenir compte de la contrainte d'ordre décroissant.

Méthode par essais rectifications :
On peut placer les nombres au fur et à mesure en respectant les contraintes de voisinages puis lorsqu'on se trouve face à une impossibilité, on peut déplacer certains nombres déjà placés jusqu'à satisfaire toutes les contraintes. On pouvait également remarquer que le plus grand nombre possible à gauche est 33 et le plus petit possible à droite est 18 (même si a priori, ce ne sont pas nécessairement ceux-là).

Méthode par exhaustion des cas (on examine tous les cas possibles) :
Les procédures élèves s'apparentent à celles de la méthode précédente mais cette méthode permet de s'assurer qu'il n'y a pas d'autres solutions.

Il y a trois possibilités pour le premier (31, 32 ou 33), idem pour le second, etc. Les trois chiffres apparaissent au moins une fois et l'un d'entre eux apparait deux fois.



Méthode en appui sur un raisonnement :
Rangeons les nombres dans l'ordre décroissant.
Le chiffre 9 du deuxième nombre impose un chiffre des unités différent pour le premier (3 et 2 ou 2 et 1). Un raisonnement identique sur les chiffres des dizaines des deux derniers nombres impose des chiffres différents (2 et 1 ou 3 et 2). Les trois derniers nombres sont donc 29, 24 et 18. Dans la mesure où on sait que les trois

chiffres effacés sont 1, 2 et 3, le premier nombre est 33 (sans cette contrainte, le premier nombre aurait également pu être 31).

Remarque :

Afin de permettre aux élèves de gérer plus facilement leurs essais, on peut leur fournir des étiquettes ou des jetons numérotés qu'ils peuvent placer et déplacer facilement.
Ce sera également l'occasion de mobiliser en situation la propriété de transitivité de l'ordre.
Ce problème permet au fil des raisonnements de solliciter en situation tour à tour chacune des tâches relatives à l'ordre (la comparaison, le rangement, l'intercalation et l'encadrement) en mobilisant les compétences liées à la numération décimale de position.

Prolongement :

On peut proposer aux élèves de jouer à un jeu de bataille en piochant à chaque fois deux cartes-chiffres qu'ils doivent juxtaposer pour proposer un nombre à comparer avec celui de leur adversaire.

3) Bandes.....6 ✸

Réponse : **la bande la plus longue est gris foncé.**

Les procédures sont diverses, elles traduisent la notion de grandeur.

Comparaison directe :
On découpe tous les morceaux, on les met bout à bout pour reconstituer les quatre bandes et on compare leur longueur.

Comparaison indirecte :
On utilise quatre règles informables (bandes de papier d'une quinzaine de cm) et sur chacune d'elles, on reporte la longueur des bouts de bandes pour reformer chaque bande. On compare ensuite les quatre gabarits en les disposant côte à côte.

Mesurage :
On utilise la règle graduée pour mesurer chaque bout d'une bande et on calcule sa longueur en ajoutant les différentes longueurs obtenues. Après avoir trouvé les longueurs de chacune des bandes, on compare leur mesure dans la même unité. Compte tenu des documents supports présentés (sujet et figures) et des mesures en cm non entières, cette procédure est plus difficile.

Estimation et comparaison directe :
Visuellement, on peut estimer que les bandes ont été découpées en petits morceaux de quatre longueurs différentes (M_1, M_2, M_3 et M_4, du plus court au plus long). Sur la droite du dessin représentant les bandes découpées, on peut voir que M_4 est plus long que deux M_2. Sur la gauche, M_3 est aussi long que M_1 et M_2 mis bout à bout. Ainsi, on peut conclure que la bande gris foncé est la plus longue.

Remarque :

La construction de la notion de grandeur doit précéder la mesure. Il est important de ne pas dévaloriser au profit de la mesure les premières procédures décrites ci-dessus. La séquence issue des documents d'accompagnement des programmes 2002 (grandeurs et mesures à l'école élémentaire, annexe sur les longueurs) présentait une progression intéressante sur la longueur.

Prolongement :

Ranger toutes les bandes, de la plus courte à la plus longue. On peut aussi proposer de jouer au « jeu du plus grand train », sur le site Primaths : http://primaths.fr/outils%20moyens-grands/leplusgrandtrain.html

4) Carré magique .....8 ✸

Réponse : **la première ligne contient les nombres 2, 6 et 7**.

Les deux tableaux que l'on peut obtenir sont les suivants :

2	**7**	**6**
9	**5**	**1**
4	**3**	**8**

6	**7**	**2**
1	**5**	**9**
8	**3**	**4**

Méthode par essais rectifications :
On peut placer les nombres au fur et à mesure en respectant les contraintes de voisinages puis lorsqu'on se trouve face à une impossibilité, on peut déplacer certains nombres déjà placés jusqu'à satisfaire les huit contraintes (3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales).

Méthode s'appuyant sur l'analyse des obligations, des impossibilités et sur l'examen des possibles pour chacune des cases à remplir :
Le nombre 3 est le premier à être inséré, c'est le complément à 15 de 12 (7+5). La somme 15 de la première ligne impose de trouver le complément à 15 de 7 (soit 8) en faisant la somme de deux des six nombres qu'il nous reste et la seule possibilité pour faire 8 avec une somme de deux des nombres 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 est 6+2. Une fois le 6 et le 2 placés, les autres nombres sont obtenus par complément à 15 de la somme de deux autres nombres déjà placés sur une ligne, une colonne ou une diagonale.

Remarque :

Il existe huit grilles « différentes », c'est-à-dire non superposables si on garde la même orientation. Outre le raisonnement et la prise en compte de plusieurs contraintes, ce problème mobilise du calcul mental sur les petits nombres, et ceci dans les « deux sens » (trouver une somme et décomposer additivement un nombre) des compétences essentielles tant en calcul mental, en ligne ou posé.

Prolongement :

On peut travailler sur des grilles sans la contrainte de la somme identique mais alors avec des nombres plus grands. Les sommes des nombres de chaque ligne ou de chaque colonne sont indiquées en gras.
En voici un exemple :

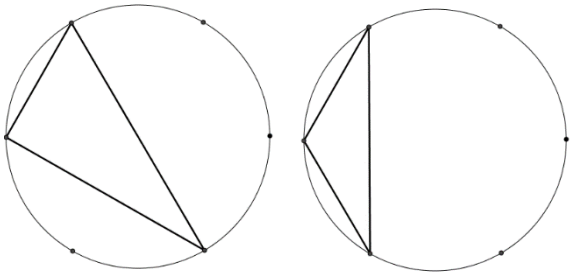
			22
			25
			23
24	**22**	**24**	

Les solutions d'une même grille sont multiples, le calcul mental est fortement sollicité.

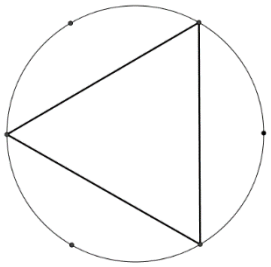
5) Les triangles.....10 ✸

Réponse : **on peut tracer 3 triangles différents.**

Commençons par tracer un côté du triangle en joignant deux points consécutifs placés sur le cercle. On obtient deux triangles possibles :



Si on choisit deux autres points consécutifs, on peut remarquer que nous n'obtiendrons aucun triangle différent d'un des deux déjà construits.
Traçons à présent un triangle dont un côté joint deux points placés sur le cercle tels qu'il existe un point entre les deux. On remarque que deux triangles de ce type ont déjà été tracés ci-dessus, on peut ajouter celui-ci :



Pour poursuivre le même raisonnement, il faudrait étudier les triangles dont un côté relie deux points diamétralement opposés sur le cercle. Il n'y en a qu'un seul, il a déjà été mis en évidence.

Remarque :

Ce problème de recherche de l'exhaustivité des solutions nécessite de s'assurer que la méthode de mise en évidence de tous les triangles possibles soit fiable. Ensuite, il faut pouvoir vérifier que deux triangles sont superposables ou non. On peut mettre à disposition du papier calque pour s'en assurer.
Cette recherche permet de percevoir une même forme avec des dispositions différentes (par des pivotements ou des retournements).

Prolongement :

Même problème avec un nombre différent de points régulièrement disposés sur un cercle (9 par exemple).