Rallye mathématique sans frontière Midi-Pyrénées

Cycle 3 : deuxième manche

Jeudi 24 janvier 2019

1) Quelle heure est-il ?...............2 ✸

Réponse : **l'horloge 2 indique 09h05.**

Raisonnement en appui sur les horloges :
Il y a 3h40 entre la 1ère et la 3e horloge dont l'aiguille des minutes indique 35 min, l'aiguille des minutes de la 1ère horloge indique donc 55min soit 7h55. La 2e horloge avance de 1h10 par rapport à la 1ère, donc la 2e horloge indique 7h55 + 1h10 soit **09h05**.

Raisonnement en appui sur l'examen des possibles :
L'heure indiquée par la 1ère horloge est comprise entre 7h00 et 7h59. Il y a 3h40 entre la 1ère et la 3e horloge qui indique donc une heure comprise entre 10h40 et 11h39. Son aiguille des minutes indiquant 35 min, l'heure indiquée par la 3e horloge est donc nécessairement 11h35. La 2e horloge retarde de 2h30 par rapport à la 3e, donc la 2e horloge indique 11h35 – 2h30 soit **09h05**.

Remarque :

Au-delà de la lecture de l'heure, ce problème articule dans les raisonnements la grandeur temps chronologique (instants repérés sur les horloges) et la grandeur temps durée (entre deux instants). Ceci est d'autant plus difficile pour les élèves que les unités portent le même nom, heures, minutes… Il est didactiquement judicieux dans les ostensifs proposés aux élèves de distinguer ces deux grandeurs par exemple par des couleurs et/ou des positions sur l'axe du temps différentes (instants d'un côté et durées de l'autre).

Prolongements :

Lorsque je suis parti ce matin, ma montre, l'horloge du four et celle du micro-onde affichaient la même heure.
À mon retour, ma montre indiquait 19 h 12, l'horloge du four indiquait 18 h 54 et celle du micro-onde indiquait 03 h 39.
Je me suis alors souvenu qu'en cas de panne de courant :
- l'horloge du four s'arrête le temps de la panne puis se remet en route à l'heure où elle s'est arrêtée ;
- le micro-onde repart à 0 h 00 lorsque le courant est rétabli.

Il n'y a eu qu'une seule coupure de courant dans la journée.
À quelle heure a débuté la panne de courant ?

2) Billes qui roulent....................4 ✸

Réponse : **pour atteindre l'objectif, l'enchaînement des boutons jusqu'à obtenir le premier E sur le rail d'en bas est 113313 ou 223323.**

La première bille à gauche d'un rail tombe lorsqu'on appuie sur le bouton correspondant, elle roule ensuite de gauche à droite sur le rail du bas et vient se caler sur la bille précédente à droite. La première bille qui doit tomber doit être un A (on peut donc appuyer sur les boutons **1** ou **2**). Ensuite, pour faire tomber une bille B, on doit nécessairement appuyer sur le même bouton. Pour faire ensuite tomber une bille C, on peut soit appuyer encore sur le même bouton, soit sur le bouton **3**, etc. Si on appuie cinq fois sur le même bouton, on ne peut plus faire tomber la sixième bille E. L'élimination des impasses conduit aux deux solutions **113313 ou 223323.**

Remarque :

Le problème induit une temporalité, du fait de la conception de cette machine : une bille tombe lorsqu'on appuie sur un bouton, elle roule de gauche à droite sur le rail du bas et vient se caler sur la bille précédente à droite. Le premier E qui tombe est donc le sixième en partant de la droite. Mais comme on veut atteindre l'objectif, on ne peut pas s'arrêter simplement à celui-là, il faut considérer toute la chaine (il faut s'assurer que pour atteindre ce premier E, on n'a pas utilisé des billes qui doivent servir ensuite).

Prolongements :

Ce problème est issu du site http://castor-informatique.fr/ (entraînement au concours 2018) que nous vous invitons à explorer.

3) Règle cassée ....6 ✸

Réponse : **c'est Valentin qui a cassé la règle.**

Méthode par examen de tous les possibles :
On examine chacun des 4 cas où l'un d'eux dit la vérité et les trois autres mentent.
1er cas : Lucas dit la vérité, Océane a donc cassé la règle. Or dans ce 1er cas, Océane ment et Valentin a donc aussi cassé la règle avec elle ce qui n'est pas compatible avec l'affirmation de Julie qui ment aussi dans ce 1er cas.
2e cas : Julie dit la vérité, Valentin a donc cassé la règle. Dans ce 2e cas, Océane, Valentin et Lucas mentent. Donc c'est bien Valentin qui a cassé la règle.
3e cas : Valentin dit la vérité, il n'a donc pas cassé la règle mais dans ce cas Océane aussi dit la vérité ce qui n'est pas possible (un seul des 4 a dit la vérité).
4e cas : Océane dit la vérité, Valentin n'a donc pas cassé la règle mais dans ce cas valentin aussi dit la vérité ce qui n'est pas possible (un seul des 4 a dit la vérité).

Autre méthode :
Si Julie ment, alors Valentin et Océane sont deux à dire la vérité, donc Julie ne ment pas et c'est bien Valentin qui a cassé la règle.

Remarque :

Cette recherche est l'occasion d'amener les élèves à exploiter les implicites de chaque information dans un problème, notamment en reformulant négativement une affirmation ou affirmativement une négation. Ce traitement amenant les élèves à changer de points de vue (tel si Marc a trois fois plus de billes que Pierre, c'est que Pierre a trois fois moins de billes que Marc) est souvent essentiel pour judicieusement choisir une modélisation de la situation propice à la résolution du problème.

Prolongements :

Un homme, accusé d'avoir dévalisé une banque, passe en jugement. Trois témoins viennent à la barre. Voici en partie leurs dépositions :

- Premier témoin : « l'accusé a commis plus d'une douzaine de vols dans le passé »
- Second témoin (s'adressant au premier) : « ce n'est pas vrai »
- Troisième témoin : « il a certainement commis au moins un vol ! »

La suite des débats montra qu'un seul témoin avait dit la vérité.
L'accusé est-il coupable ?

4) Tableau.................................8 ✸

Réponse : **le nombre 8 est dans la case grisée.**

a	*b*	*c*	**←154**
d	*e*	*f*	**←520**
g	*h*	*i*	**←51**
↑ **105**	↑ **272**	↑ **143**	

Un raisonnement par tâtonnement est trop aléatoire et très incertain. Cependant une observation des nombres permet de réduire significativement le champ des possibles.
Le critère de divisibilité par 2 impose des multiples de deux dans la 2e colonne et uniquement dans les cases b et e.
Le critère de divisibilité par 3 (s'il est connu des élèves) impose un multiple de trois uniquement dans la case g.
Le critère de divisibilité par 5 impose un multiple de 5 dans la case d et uniquement dans celle-ci.
Naturellement, on peut chercher à décomposer multiplicativement en premier le plus petit nombre 51 qui ne se décompose que de deux façons différentes $17 \times 3 \times 1$ ou $51 \times 1 \times 1$. En cherchant à diviser successivement 105, 272 et 143 par 3 et 17, on élimine la seconde et on remplit la troisième ligne :

3	17	1	←51

$105 : 3 = 35 = 5 \times 7$. En cherchant à diviser successivement 154 et 520 par 5 et 7, on remplit la première colonne $a = 7$ et $d = 5$.

7			←154
5			←520
3	17	1	←51
↑ 105	↑ 272	↑ 143	

Cela revient ensuite à compléter le tableau :

b	c	←22
e	f	←104
↑ 16	↑ 143	

Le nombre 22 ne se décompose que de deux façons différentes 11×2 ou 22×1 ; 16 n'étant pas un multiple de 11 et 143 n'étant pas pair, on a nécessairement $b = 2$ et $c = 11$.
On en déduit alors que $e = 8$.

7	2	11	←154
5	8	13	←520
3	17	1	←51
↑ **105**	↑ **272**	↑ **143**	

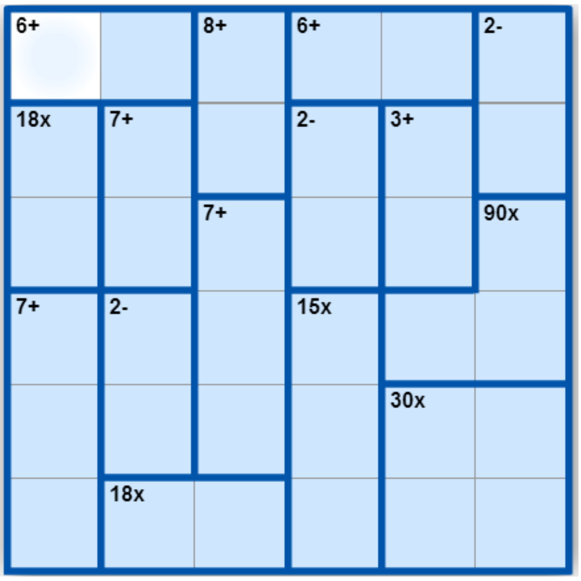
Un autre chemin pouvait aussi s'appuyer sur les deux seules décompositions multiplicatives possibles de 143 soit $13 \times 11 \times 1$ ou $143 \times 1 \times 1$.

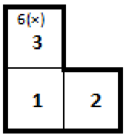
Remarque :

Outre le raisonnement, la prise en compte de plusieurs contraintes, ce problème mobilise les propriétés arithmétiques multiplicatives des nombres, et ceci dans les « deux sens », trouver un produit et décomposer multiplicativement un nombre, des compétences qui avec les propriétés des opérations étayent les compétences des élèves en calcul tout au long de leur scolarité.

Prolongements :

Matoku (https://jeux.ouest-france.fr/)
Placer dans chaque case les nombres de 1 à 6. Il ne peut pas y avoir deux fois le même nombre sur une même ligne ni sur une même colonne.
Le nombre inscrit en haut à gauche de chaque bloc est le résultat de l'opération (précisée entre parenthèses) effectuée avec les nombres du même bloc (voir l'exemple ci-dessous).

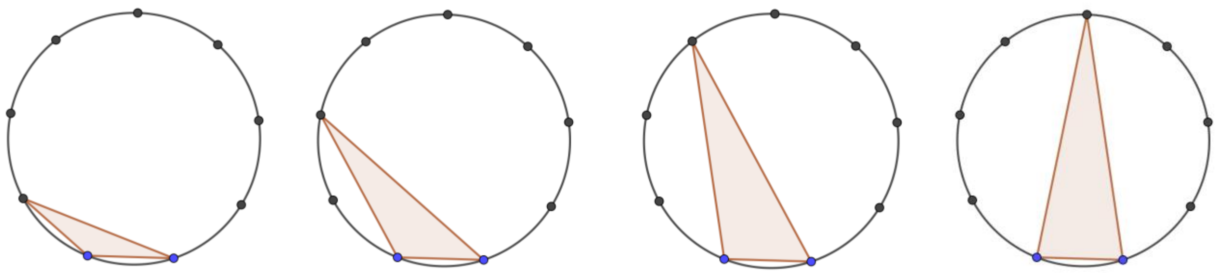




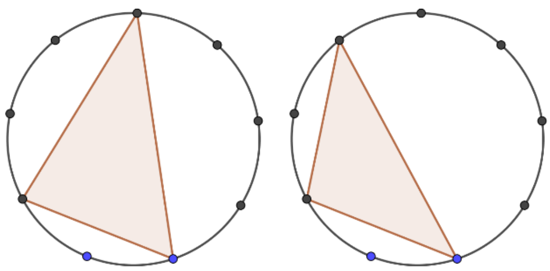
5) Triangles ....10 ✸

Réponse : **on peut tracer 7 triangles différents.**

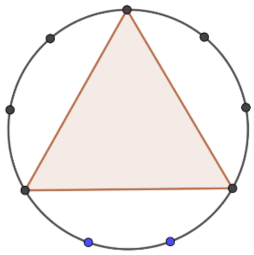
Méthode par examen de tous les possibles :
Commençons par tracer un côté du triangle en joignant deux points consécutifs placés sur le cercle. On obtient quatre triangles possibles :



Si on choisit deux autres points consécutifs, on peut remarquer que nous n'obtiendrons aucun triangle différent d'un de ceux déjà construits.
Traçons à présent un triangle dont un côté joint deux points placés sur le cercle tels qu'il existe au moins un point entre les deux. On obtient deux triangles possibles :



Traçons à présent un triangle dont un côté joint deux points placés sur le cercle tels qu'il existe au moins deux points entre les deux. On obtient un seul triangle possible :



Remarque :

Ce problème de recherche de l'exhaustivité des solutions nécessite de s'assurer que la méthode de mise en évidence de tous les triangles possibles soit fiable. Ensuite, il faut pouvoir vérifier que deux triangles sont superposables ou non. On peut mettre à disposition du papier calque pour s'en assurer.
Cette recherche permet de percevoir une même forme avec des dispositions différentes (par des pivotements ou des retournements) et de s'éloigner des représentations prototypiques.

Prolongements :

Même problème avec un nombre différent de points régulièrement disposés sur un cercle.
On peut amener les élèves à identifier le nombre de régions déterminées dans un disque en traçant toutes les cordes d'extrémités n points sur le cercle (non nécessairement régulièrement disposés).

Nombre de points	1	2	3	4	5	6	7	8	…
Nombre de régions	1	2	4	8	16	31	57	99	…

Ce dénombrement peut permettre d'alerter les élèves sur des généralisations trop hâtives à partir de cas particuliers.