

Rallye mathématique sans frontière Midi-Pyrénées



Cycle 2 : suite de la troisième manche

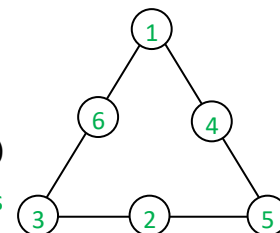
du mardi 10 mars 2020 (page 1)

INSPÉ Institut national
supérieur du professorat
et de l'éducation
Toulouse Occitanie-Pyrénées

1) Un bon placement 2 ★

Réponse : **plusieurs dispositions sont possibles (six) mais les nombres 1, 3 et 5 sont toujours sur les sommets du triangle ; leur somme est donc toujours 9.**

(ci-contre un exemple de disposition →)



Une première stratégie consiste à placer les nombres par tâtonnement puis à déplacer certains d'entre eux pour garantir la contrainte de la somme 10 sur chacun des côtés des triangles. Une autre stratégie consiste à rechercher en amont les décompositions additives de 10 à l'aide des 6 nombres disponibles. En organisant sa recherche on peut retrouver tous les cas possibles (en utilisant une seule fois chacun des nombres de 1 à 6) :

$6 + 3 + 1$; quand le plus grand nombre utilisé est 6, il n'y a qu'une façon d'obtenir son complément à dix ($4 = 3 + 1$).
 $5 + 4 + 1$ et $5 + 3 + 2$; quand le plus grand nombre utilisé est 5, il n'y a que deux façons d'obtenir son complément à dix ($5 = 4 + 1$ et $5 = 3 + 2$).

Si le plus grand nombre utilisé est 4, alors 10 ne peut pas être atteint car $4 + 3 + 2 = 9$.

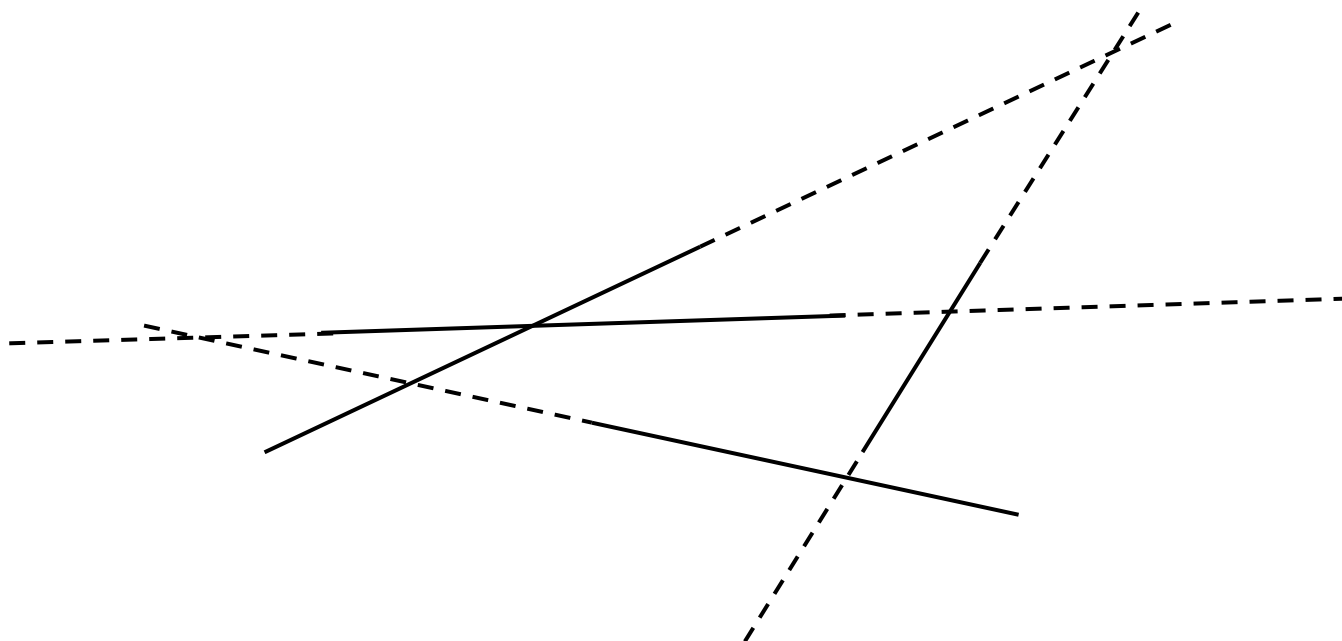
Dans ces décompositions seuls (2 ; 4 ; 6) n'apparaissent que dans une seule somme tandis que (1 ; 3 ; 5) apparaissent dans deux sommes différentes ; donc (2 ; 4 ; 6) sont sur les côtés du triangle tandis que (1 ; 3 ; 5) sont sur les sommets du triangle et ont pour somme 9.

Remarques : L'utilisation de jetons ou d'étiquettes facilement déplaçables permet à l'élève de se concentrer plus facilement sur la prise en compte simultanée des contraintes (lesquelles mobilisent les compétences associées à nos objectifs d'apprentissages sous-jacents : calcul mental sur de petits nombres, compléments à dix...) sans être préoccupé par la manipulation du crayon et de la gomme pour changer la position des nombres. Cette manipulation associée au calcul mental permet de faire vivre pleinement les compétences chercher et raisonner.

Prolongements : On peut proposer le même problème en changeant la somme sur les trois côtés : 11, 12.

Après avoir résolu les problèmes précédents, en fin de cycle, certains pourraient montrer que c'est impossible avec une somme égale à 13 sur chaque côté du triangle puis chercher toutes les possibilités de somme commune possible sur les côtés du triangle (avec les nombres de 1 à 6).

2) Prolongements 4 ★



Rallye mathématique sans frontière Midi-Pyrénées



Cycle 2 : suite de la troisième manche

du mardi 10 mars 2020 (page 2)



Réponse : Il y a 5 croisements supplémentaires.

On peut prolonger tout en conservant des alignements sur des directions non parallèles aux bords inférieur et supérieur de la feuille, dans des directions « obliques », vers la « gauche » ou « vers la droite », vers le « bas » ou vers le « haut ». Les croisements peuvent être assez proches des représentations déjà tracées mais aussi dans le texte voire hors de la feuille...

Remarque : ce problème permet de travailler sur l'alignement dans l'espace papier crayon en mobilisant cette propriété portée implicitement par la règle.

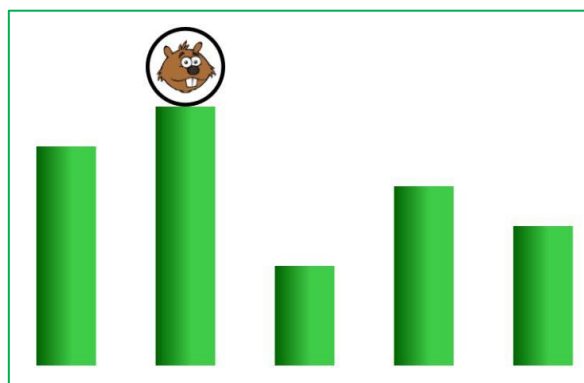
Prolongements : on peut proposer le même exercice dans la salle de motricité, sous le préau, dans la cour avec des segments tracés au sol à la craie en faisant remarquer aux élèves que la règle n'y est pas toujours l'instrument le plus pertinent pour matérialiser ou vérifier un alignement (corde tendue, visée...).

3) Castor sur des bambous6 *

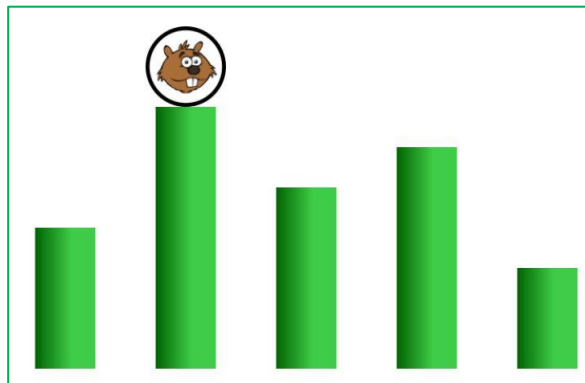
Réponse : Seuls les bambous A ou B peuvent être alors en position 4.

Si le bambou A est en 4^e position, les trois autres peuvent être placés de manière quelconque. Si le bambou B est en 4^e position, le bambou A est nécessairement en 1^{ère} position et les deux autres peuvent être placés indifféremment.

Exemples de configurations satisfaisant les contraintes de l'énoncé



ou



ou...

A2DBC

C2BAD

Après s'être approprié les contraintes par divers essais-rectifications qui pouvaient permettre de trouver des solutions avec A ou B en 4^e position, il s'agit d'explorer par un raisonnement méthodique tous les cas possibles avec successivement C puis D en 4^e position pour pouvoir les éliminer.

Remarque : on pouvait modéliser la situation matériellement par des buchettes ou crayons ou bandelettes de papier de différentes longueurs. La manipulation virtuelle sur le site focalise davantage encore la réflexion sur le raisonnement.

Prolongements : n'hésitez pas à aller visiter le site Castor-informatique.fr

4) Du rangement8 *

Réponse : $B < A < C < D$.

On pouvait procéder par comparaison indirecte en utilisant une règle « informable » (i.e. règle non graduée sur laquelle on peut écrire et effacer pour reporter des longueurs) ou une bande de papier sur laquelle on reporte bout à bout les longueurs des différents segments constituant la ligne. En prenant sur la règle informable une origine commune pour les quatre lignes, l'ordre des repères nous fournit l'ordre de leurs longueurs.

On pouvait également procéder par mesurages des différents morceaux de la ligne puis additionner les mesures obtenues ; la comparaison des mesures effectuées dans la même unité fournit l'ordre de leurs longueurs.

Rallye mathématique sans frontière Midi-Pyrénées



Cycle 2 : suite de la troisième manche

du mardi 10 mars 2020 (page 3)



Remarques : ce problème permet de faire vivre le concept de longueur en dehors des segments. La longueur est une grandeur associée à des lignes dans toute leur variété (segments, lignes brisées, courbes, ouvertes ou fermées, dans des directions quelconques par rapport aux bords de la feuille...).

Il peut être judicieux de distinguer les concepts de distance et de longueur. Ici on pourra faire remarquer que la distance entre les deux extrémités de la ligne, ou la plus grande distance entre les deux points les plus éloignés de la ligne, ou l'aire de la zone occupée par la ligne, ou le nombre de changements de directions... ne sont pas des critères valides pour comparer les longueurs des lignes.

Prolongement : dessiner une ligne brisée de longueur donnée entre d'extrémités deux points A et B donnés (si la longueur donnée est égale à la distance entre les points A à B, il faut dessiner le segment [AB] ; si la longueur donnée est inférieure à la distance de A à B, il n'y a pas de solution).

5) Retrouver leurs âges10 *

Réponse : Brice a 9 ans et Alice a 15 ans.

On peut remarquer tout d'abord, qu'aucun d'eux n'a plus de 24 ans, qu'Alice est plus âgée que Brice (donc que Brice est plus jeune qu'Alice)... On peut tout d'abord essayer par tâtonnements, puis par exhaustion des cas avec plusieurs méthodes selon l'ordre de prise en compte des contraintes :

- à partir de la liste des décompositions additives de 24 (ils ont 24 ans en tout).

Âge de Brice aujourd'hui	Âge d'Alice aujourd'hui	Âge de Brice il y a 3 ans	Âge d'Alice il y a 3 ans	Double ?
1	23			
2	22			
3	21	0	18	non
...	...	...	...	...
7	17	4	14	non
8	16	5	13	non
9	15	6	12	oui
10	14	7	11	non
...	...	...	...	...

- à partir de la liste des doubles (Il y a trois ans, Alice avait le double de l'âge qu'avait Brice à ce moment-là.)

Âge de Brice il y a 3 ans	Âge d'Alice il y a 3 ans	Âge de Brice aujourd'hui	Âge d'Alice aujourd'hui	Somme 24 ?
1	2	4	5	9
2	4	5	7	12
3	6	6	9	15
4	8	7	11	18
5	10	8	13	21
6	12	9	15	24
7	14	10	17	27
8	16	11	19	
9	18	12	21	
10	20	13	23	

Rallye mathématique sans frontière Midi-Pyrénées

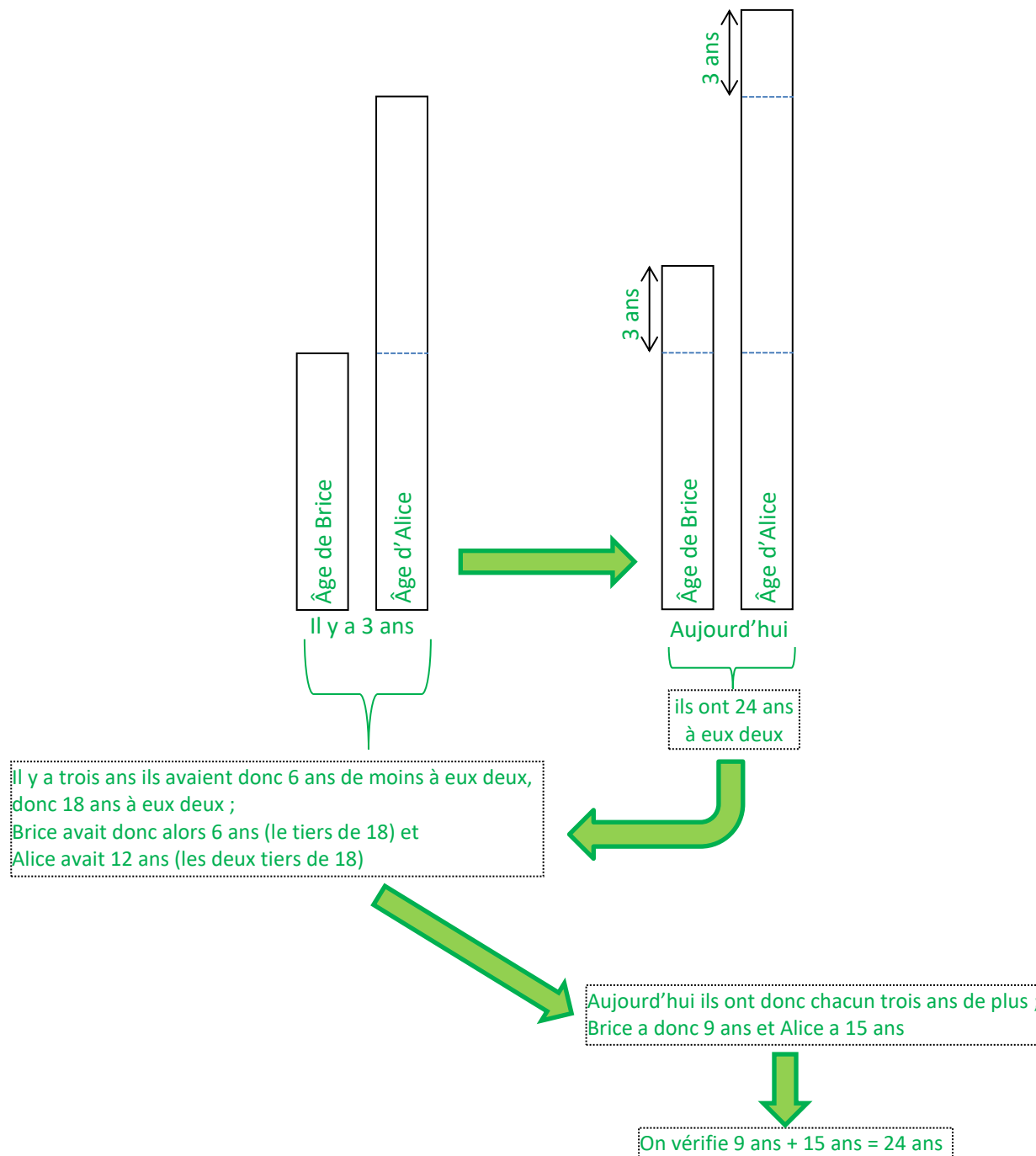


Cycle 2 : suite de la troisième manche

du mardi 10 mars 2020 (page 4)



- en modélisant la situation à l'aide d'un graphique



Remarques : on peut remarquer que lorsque les tâtonnements sont infructueux et chronophages, parfois l'examen organisé de tous les possibles (lorsqu'ils sont limités en nombre) peut être une démarche efficace pour résoudre certains problèmes (même lorsqu'ils sont nombreux, les premiers essais, quand ils sont organisés, peuvent suggérer des méthodes de résolution du problème).

Les méthodes expertes ne sont pas toujours les méthodes de plus haut niveau cognitif ; dans cet exemple la méthode d'exhaustion de tous les possibles est de loin la méthode experte pour des élèves de l'école élémentaire. Le choix du type de modélisation relève de la compétence de l'élève que l'on peut travailler par comparaisons des diverses procédures personnelles des élèves au quotidien dans la classe ; lorsqu'elles sont correctes, ces procédures peuvent se côtoyer et ont toutes leur légitimité dans la classe. L'hyper-valorisation d'une méthode perçue comme experte à un niveau donné peut

Rallye mathématique sans frontière Midi-Pyrénées



Cycle 2 : suite de la troisième manche

du mardi 10 mars 2020 (page 5)



d'une part aseptiser les conceptions des élèves et d'autre part restreindre drastiquement le moment de recherche fondamental dans l'activité mathématique.

Comme dans beaucoup de problèmes, plusieurs types de modélisations sont mobilisables par les élèves (corporellement, matériellement, graphiquement, scripturalement (en lettres / en chiffres), verbalement... La modélisation par un graphique n'est pas toujours l'outil le plus efficient comme on peut le voir ici.

Il est important que les élèves conscientisent que les modélisations sont des aides au raisonnement et qu'elles ne respectent pas nécessairement toutes les propriétés de la situation (dans la modélisation graphique ci-dessus, le rapport de longueurs relatif au double est respecté mais pas la proportionnalité des longueurs des barres par rapport aux âges). Les diagrammes



en barres parties-tout sont très congruents avec les problèmes de composition d'états (additives ou multiplicatives en additions itérées), congruents avec les problèmes de transformations d'états mais un peu moins comme on le voit ici dans les problèmes de transformations de comparaisons (additives ou multiplicatives).

Ce problème intègre trois structures opératoires différentes (d'où sa difficulté) : une composition d'états (24 ans en tout), une comparaison multiplicative d'états (double) et une transformation additive implicite de deux états (+ 3 ans).

Ce problème exploite un invariant implicite selon lequel on vieillit tous à la même vitesse (d'un point de vue administratif :-) ; au fur et à mesure que l'on avance en âge, la différence d'âge est constante. Il peut être judicieux de rendre explicite ce savoir « social » au gré des rencontres avec de tels problèmes.

Prolongement : Célia a 4 ans de moins qu'Hugo et Hugo a le double de l'âge de Célia. Quels âges ont-ils ?