Rallye mathématique sans frontière Midi-Pyrénées

Cycle 3 : suite de la troisième manche

du mardi 10 mars 2020 (page 1)

1) Retrouver les bons chiffres.......................... 2 ✸

Réponse : **Il s'agit respectivement des chiffres 7, 6, 4 et 5.**

Quand on multiplie le nombre à un chiffre « B » par lui-même, on retrouve « B » comme chiffre des unités du produit. Or, seuls les chiffres 0, 1, 5, et 6 ont cette propriété.

- On exclut B = 0 car sinon tous les chiffres du produit seraient « 0 », ce qui n'est pas le cas.
- On exclut B = 1 car sinon le produit serait égal au multiplicande et aurait également 3 chiffres.
- On exclut B = 5 car sinon les 4 chiffres A, B, C et 5 ne seraient pas tous différents.

Essayons B = 6 : au rang des dizaines, un produit de la table de 6 augmenté de la retenue 3 (du rang des unités) doit se terminer par 5 ; donc le produit doit se terminer par 2 (seuls 12 et 42 conviennent) ; on élimine 12 (A = 2) car $226 \times 6 = 1356$ (on ne retrouve pas B = 6 comme chiffre des centaines du produit) ; reste 42 avec A = 7 qui donne $776 \times 6 = 4656$ qui satisfait à toutes les contraintes et constitue donc l'unique solution.

Remarques : quelques essais facilités par l'utilisation de jetons ou d'étiquettes facilement déplaçables peuvent permettre à l'élève de tester plusieurs triplets de chiffres candidats ; on peut faire remarquer que le raisonnement peut ici permettre de réduire de manière significative le nombre d'essais et ainsi valoriser les méthodes s'appuyant sur le raisonnement par rapport aux méthodes s'appuyant sur le tâtonnement.

Le travail sur les opérations à trous aident à conscientiser les différentes étapes des algorithmes des opérations posées en colonnes et mobilisent pleinement la recherche et le raisonnement dans le domaine du calcul posé.

Prolongement :
Dans la soustraction (correcte) ci-contre, on n'a utilisé que 7 chiffres (A, B, 0, 4, 5, 8 et 9) tous différents. Quels sont ces chiffres ?

$$\begin{array}{rcccc} & A & 8 & 9 & B \\ - & 5 & 9 & 0 & 4 \\ \hline & B & 9 & 8 & A \end{array}$$

2) Retrouver le périmètre .... 4 ✸

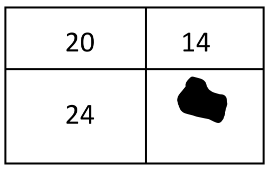
Réponse : **La mesure, en mètres, du périmètre du grand rectangle est 38.**

On peut par exemple calculer les demi-périmètres des 4 petits rectangles (correspondants à la longueur de leurs deux côtés « extérieurs »), lesquels permettent de reconstituer les côtés du grand rectangle ; d'où

$$\frac{16}{2}+\frac{10}{2}+\frac{28}{2}+\frac{22}{2}=8+5+14+11=38$$

Remarque : Cette situation peut être l'occasion de montrer que le raisonnement s'appuyant sur l'additivité des aires n'est pas valide sur les périmètres quand on juxtapose des surfaces.

Prolongement :
On a partagé un grand rectangle en quatre petits rectangles. À l'intérieur de ces petits rectangles on a écrit les mesures en mètres de leurs périmètres.
Quelle est la mesure, en mètres, du périmètre du petit rectangle caché par la tache noire ?



3) Retrouver leurs âges .... 6 ✸

Réponse : **Julie a 8 ans et Inès a 16 ans.**

On peut remarquer tout d'abord, qu'elles ont chacune au moins 4 ans, qu'Inès est plus âgée que Julie (donc que Julie est plus jeune qu'Inès)… On peut tout d'abord essayer par tâtonnements, puis par exhaustion des cas avec plusieurs méthodes selon l'ordre de prise en compte des contraintes :

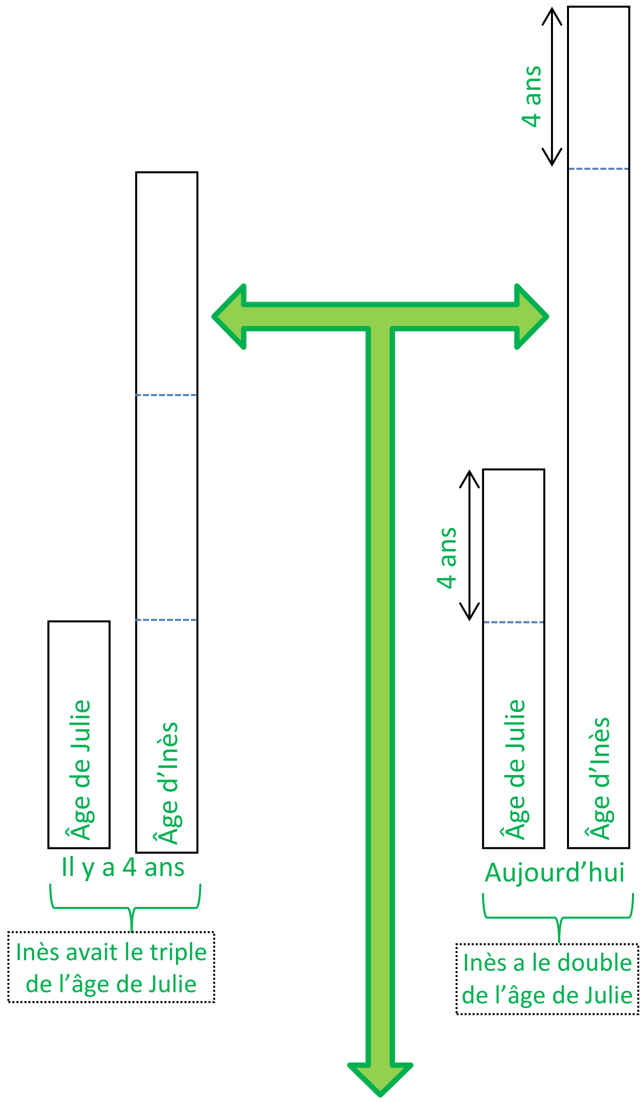
- à partir de la liste des doubles (Inès a le double de l'âge de Julie).

Âge de Julie aujourd'hui	Âge d'Inès aujourd'hui	Âge de Julie il y a 4 ans	Âge d'Inès il y a 4 ans	triple ?
3	6			
4	8	0	4	non
5	10	1	6	non
6	**12**	2	8	non
7	14	3	10	non
8	**16**	**4**	**12**	**oui**
9	**18**	**5**	**14**	**non**
10	20	6	16	non
…	…	…	…	…

- à partir de la liste des triples (il y a quatre ans, Inès avait le triple de l'âge qu'avait Julie)

Âge de Julie il y a 4 ans	Âge d'Inès il y a 4 ans	Âge de Julie aujourd'hui	Âge d'Inès aujourd'hui	double ?
1	3	5	7	non
2	6	6	10	non
3	9	7	13	non
4	**12**	**8**	**16**	**oui**
5	15	9	19	non
6	18	10	22	non
…	…	…	…	…

- en modélisant la situation à l'aide d'un graphique



En comparant l'âge d'Inès aujourd'hui à l'aide des autres barres, on peut voir qu'on peut l'obtenir :
- soit avec trois fois l'âge de Julie (il y a 4 ans) augmenté de quatre ans
- soit avec deux fois l'âge de Julie (il y a 4 ans) augmenté de huit ans âges

J	J	J	4 ans
J	4 ans	J	4 ans

Julie avait donc 4 ans il y a 4 ans et a donc 8 ans aujourd'hui.
Inès a donc 2 fois 8 ans soit 16 ans aujourd'hui.

On vérifie : Inès avait donc 12 ans il y a 4 ans soit le triple de 4 ans l'âge de Julie à ce moment-là.

Remarques : on peut remarquer que lorsque les tâtonnements sont infructueux et chronophages, parfois l'examen organisé de tous les possibles (lorsqu'ils sont limités en nombre) peut être une démarche efficiente pour résoudre certains problèmes (même lorsqu'ils sont nombreux, les premiers essais, quand ils sont organisés, peuvent suggérer des méthodes de résolution du problème).

Les méthodes expertes ne sont pas toujours les méthodes de plus haut niveau cognitif ; dans cet exemple la méthode d'exhaustion de tous les possibles est de loin la méthode experte pour des élèves de cycle 3. Le choix du type de modélisation relève de la compétence de l'élève que l'on peut travailler par comparaisons des diverses procédures *personnelles des élèves au quotidien dans la classe ; lorsqu'elles sont correctes, ces procédures peuvent se côtoyer et ont toutes leur légitimité dans la classe. L'hyper-valorisation d'une méthode perçue comme experte à un niveau donné peut d'une part aseptiser les conceptions des élèves et d'autre part restreindre drastiquement le moment de recherche fondamental dans l'activité mathématique.*

Comme dans beaucoup de problèmes, plusieurs types de modélisations sont mobilisables par les élèves (corporellement, matériellement, graphiquement, scripturalement (en lettres / en chiffres), verbalement… ; la modélisation par un graphique n'est pas toujours l'outil le plus efficient comme on peut le voir ici.

Il est important que les élèves conscientisent que les modélisations sont des aides au raisonnement et qu'elles ne respectent pas nécessairement toutes les propriétés de la situation (dans la modélisation graphique ci-dessus, on ne peut pas respecter a priori à la fois le rapport de longueurs relatif au double et celui relatif au triple).

Les diagrammes en barres parties-tout  *sont très congruents avec les problèmes de composition d'états (additives ou multiplicatives en additions itérées), congruents avec les problèmes de transformations d'états mais un peu moins comme on le voit ici dans les problèmes de transformations de comparaisons (additives ou multiplicatives).*

Ce problème est un problème de transformation de comparaison multiplicative (triple → double) associée à une comparaison additive (implicite) des états.

Ce problème exploite un invariant implicite selon lequel on vieillit tous à la même vitesse (d'un point de vue administratif) ; au fur et à mesure que l'on avance en âge, la différence d'âge est constante. Il peut être judicieux de rendre explicite ce savoir « social » au gré des rencontres avec de tels problèmes.

Prolongement :
Alice et Brice ont ajouté leurs âges ; ils ont trouvé 24 ans en tout. Il y a trois ans, Alice avait le double de l'âge qu'avait Brice à ce moment-là. Quels sont leurs âges aujourd'hui ?

4) Cousu de fil blanc.. 8 ✸

Réponse : **Il y a 90 coutures.**

Une couture assemblant deux côtés, il y aura donc deux fois moins de coutures que le nombre de côtés de tous les polygones soit $\frac{20\times6+12\times5}{2}=\frac{180}{2}=90$.

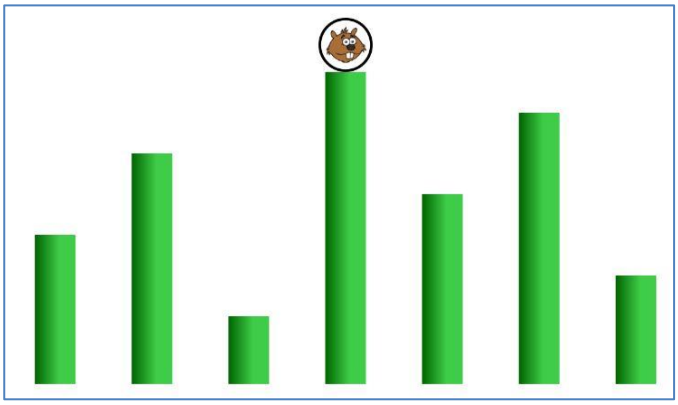
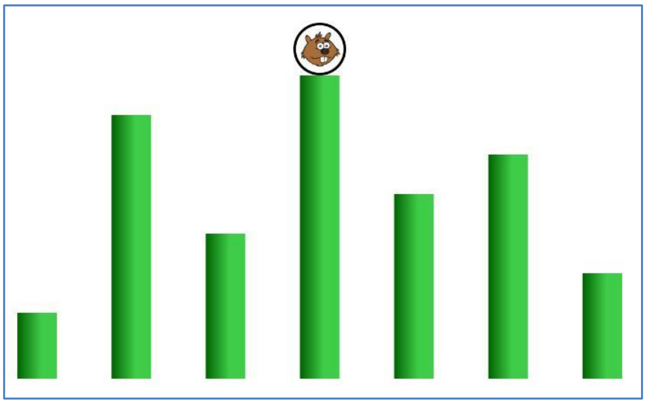
Autre méthode : on peut dénombrer les coutures autour des pentagones puis rajouter les coutures entre hexagones (avec 3 coutures par hexagone, on les a dénombrées deux fois), d'où $12\times5+\frac{20\times3}{2}=60+\frac{60}{2}=90$.

Remarque : ce problème peut amener les élèves à enrichir leurs conceptions de la notion d'arête en passant notamment d'une conception comme segment dans l'espace en trois dimensions à une conception comme partie commune à deux faces adjacentes d'un polyèdre.

Prolongement : chercher son nombre de sommets.

5) Castor sur des bambous .... 10 ✸

Réponse : **De nombreuses solutions sont possibles : GADBECF, ECGBADF…**


ou

ou…

Après quelques essais, on pouvait rapidement remarquer que dans un groupe de bambous, si le castor était sur le plus haut, si on saute d'un côté, on ne peut plus revenir sauter de l'autre côté de ce bambou ; cela nous amène naturellement à placer le bambou le plus haut B en 4^{e} position (position centrale) puis on peut appliquer le même raisonnement aux trois bambous de part et d'autre de B, ce qui amène à placer en 2^{e} et 6^{e} positions des bambous plus hauts que ceux situés de part et d'autre de ceux–ci.

Remarques : on pouvait modéliser la situation matériellement par des buchettes ou crayons ou bandelettes de papier de différentes longueurs. La manipulation virtuelle sur le site focalise davantage encore la réflexion sur le raisonnement.
Ici aussi comme dans le premier problème, on peut montrer que le raisonnement peut permettre de réduire de manière significative le nombre d'essais et ainsi valoriser les méthodes s'appuyant sur le raisonnement par rapport aux méthodes s'appuyant sur le tâtonnement.

Prolongements : n'hésitez pas à aller visiter le site Castor-informatique.fr