# Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées

## Cycle 3 : suite de la première manche

du mardi 24 novembre 2020

IRES TOULOUSE

INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Toulouse Occitanie-Pyrénées

### 1) Combien de multiples ? ........................................................................................................ 2 ✸

Réponse : **il y a 667 multiples de 3 inférieurs à 2020.**

Solution(s) : Il y a plusieurs façons de décomposer pour fiabiliser le dénombrement :

- on jalonne entre 20 et 2020 : on peut collaborer et dénombrer les multiples de trois entre 20 et 99 pour les uns, entre 100 et 199 pour d'autres… Dans la liste des nombres, les multiples de trois apparaissent tous les trois nombres, d'où l'idée d'effectuer une division euclidienne de la différence 221–20 par 3 mais cela ne donne qu'une valeur approchée à un près du nombre de multiple de 3.
- On considère les nombres compris entre 20 et 2020 comme une partie des nombres compris entre 1 et 2020.

  La suite des nombres de 1 à 2020 peut être organisée en une suite de paquets de trois nombres consécutifs qui contiennent chacun un multiple de 3. Il suffit alors de dénombrer les paquets que l'on peut constituer entre 1 et 2020. On obtient ce nombre comme quotient de la division euclidienne de 2020 par 3.

  Il suffit enfin de retrancher du nombre obtenu le nombre de multiples de 3 compris entre 1 et 20.

  | 1 – 2 - 3 | | 4 – 5 - 6 | | 7 – 8 - 9 | | 10 – 11 - 12 | … | 2017 – 2018 - 2019 | - 2020

  **Autre démarche :** on cherche le nombre de multiples de trois entre 1 et 2020 ; on essaie dans un champ numérique restreint, après expérimentation, de dégager un modèle permettant de traiter le cas complexe proposé. Des essais sur des nombres plus petits permettent de s'assurer que le quotient euclidien d'un nombre par 3 donne bien le nombre de multiples de trois inférieurs ou égaux à ce nombre. Ainsi on trouve 673 multiples de trois inférieurs à 2020 auquel il faut retrancher le nombre 6 des multiples de trois inférieurs à 20, d'où 667 multiples de trois compris entre 20 et 2020.

*Remarque(s) :*

*Il s'agit dans cet exercice de mettre en exergue la régularité d'apparition des multiples dans la suite des nombre en relation avec l'addition itérée.*

*Cet exercice est l'occasion de mobiliser diverses conceptions de la notion de multiple :*

*- Un multiple de 3 est un nombre entier qui est dans la table (étendue au-delà du multiplicateur 10) de 3 (« un autre nombre entier multiplié par 3 ») ;*

*- Un multiple de 3 est le triple d'un autre nombre entier (« un autre nombre entier ajouté trois fois ») ;*

*- Un multiple de 3 est un nombre entier divisible par 3 (« c'est un nombre entier ayant pour reste 0 dans la division euclidienne par 3 ») ;*

*- Dans l'écriture décimale d'un multiple de trois, la somme des chiffres est elle-même un multiple de trois (« critère de divisibilité par 3 » à partir du CM2).*

*À l'école élémentaire, on privilégie souvent le vocable « multiple » au vocable « diviseur » car ce dernier est polysémique en mathématique : diviseur vs multiple et diviseur vs division (dividende, diviseur, quotient, reste).*

*Prolongement : Combien y a-t-il de multiples de 4 inférieurs à 2021 (attention, ne pas oublier que 0 est un multiple de 4) ?*

### 2) Le bonneteau des couleurs ........................................................................................................ 8 ✸

Réponse : **La bille bleue se trouve dans le gobelet noir.**

Solution(s).

On rencontre ici un potentiel conflit entre différentes acceptions des locutions spatiales. Souvent dans la vie courante « à droite » peut être interprété « immédiatement à droite » ou « juste à droite ».

On peut modéliser la situation par du matériel ou par des étiquettes représentant les gobelets et les billes.

Considérons les positions des billes et gobelets suivantes : gauche, centre et droite. Chaque information peut être reformulée afin d'en obtenir de nouvelles.

- La bille verte se trouve à droite de la bille rouge(1), donc la bille rouge se trouve à gauche de la bille verte(1'), donc la bille verte n'est pas en position gauche(1'') et la bille rouge n'est pas en position droite(1''').
- Le gobelet noir se trouve à gauche du gobelet blanc(2), donc le gobelet blanc se trouve à droite du gobelet noir(2') donc le gobelet noir n'est pas en position droite (2'') et le gobelet blanc n'est pas en position gauche(2''').
- Le gobelet gris se trouve à droite de la bille bleue(3), donc la bille bleue se trouve à gauche du gobelet gris (3') donc le gobelet gris n'est pas en position gauche(3'') et la bille bleue n'est pas en position droite(3''').
- La bille verte se trouve à droite du gobelet gris(4), donc le gobelet gris se trouve à gauche de la bille verte(4'), donc le gobelet gris n'est pas en position droite(4'') et la bille verte n'est pas en position gauche(4''').

D'après (3') et (4), de gauche à droite on trouve la bille bleue puis le gobelet gris puis la bille verte, donc le gobelet gris est au centre. Donc d'après (2), de gauche à droite on trouve les gobelets noir, gris puis blanc. On déduit de (3') que la bille bleue est dans le gobelet noir.

*Remarque(s) :*
*En résolution de problème, l'ordre de présentation des informations ne correspond pas toujours à leur ordre d'utilisation dans la résolution.*
*Il est souvent judicieux de reformuler les informations que l'on possède afin de les rendre plus congruentes avec les autres et/ou avec l'élément recherché.*
*Il est aussi très utile d'inférer de nouvelles informations sur le complémentaire des éléments abordés dans l'assertion.*

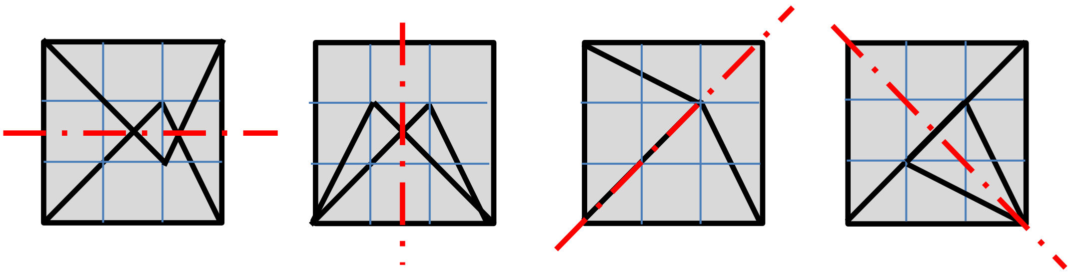
*Prolongement : cf. archives rallye, par exemple manche 2 du rallye 2014, manche 1 du rallye 2006.*

**3) Miroir, mon beau miroir ................................................................................................ 6 ✸**

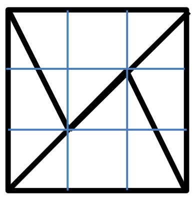
Réponse : **On peut obtenir quatre figures différentes.**

Solution(s).

Les voici ci-dessous représentées avec leurs axes de symétrie (on y retrouve les quatre axes de symétrie d'un carré).



*On superpose à la pièce A la pièce B transparente (la figure n'a pas d'axe de symétrie), pour faire coïncider les bords, on ne peut faire que des quarts de tours successifs (on obtient trois autres figures dont une seule, la première ci-dessus a un axe de symétrie) ; on retourne ensuite la pièce B et il n'y a que quatre positions pour faire coïncider les bords des deux carrés (parmi les 4 figures obtenues, trois d'entre elles ont un axe de symétrie).*



*Remarque(s) : attention la figure ci-contre a un centre de symétrie mais pas d'axe de symétrie.*

*Les deux pièces étant superposables, on peut également obtenir les 4 figures souhaitées par symétrie d'une des figures autour de chacun des quatre axes de symétries du carré.*

*Il est important de rencontrer des axes de symétrie non « verticaux », non parallèles aux bords latéraux de la feuille ; en effet la prégnance des axes de symétrie verticaux (schéma corporel, éléments sociaux autour de nous) est telle qu'ils deviennent un obstacle pour percevoir des axes de symétries ayant d'autres directions (souvent les élèves sont amenés à faire tourner la feuille, à pencher la tête afin de valider la présence ou pas d'un axe de symétrie).*

# Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées

## Cycle 3 : suite de la première manche

**du mardi 24 novembre 2020**

*Par ailleurs, les décompositions-recompositions de figures sont essentielles en géométrie ; cependant elles se font souvent exclusivement par juxtaposition ; il peut être enrichissant de faire appréhender les figures en les décomposant ainsi par superpositions.*

*Par ailleurs les instruments de géométrie utilisés en classe ne se limitent pas au trio règle-équerre-compas. Papier calque, papier pointé, gabarit d'angle droit, règle informable, té-querre, porte-angle, géoplan, miroir semi-réfléchissant… peuvent souvent aider efficacement à la construction des concepts géométriques qu'ils portent.*

*Prolongement :*
*Combien obtiendrait-on de figures différentes (non superposables par pivotement ou retournement) possédant un axe de symétrie si les deux pièces A et B superposables avaient elles-mêmes un axe de symétrie ?*

### 4) Combien pour la bougie ? ........................................................................................... 6 ✸

Réponse : **La bougie coûte un euro.**

Solution(s). Sur la 2e ligne, les cinq cloches coûtent 30 euros, donc chaque cloche coûte **6** euros.
Les quatre cloches de la dernière ligne coûtent donc 24 € ; donc un livre coûte **7** € (31 € – 24 €).
Les trois livres et la cloche de la première ligne coûtent alors 27 € (21 € + 6 €). Donc les ciseaux coûtent **4** € (31 € – 27 €).
Les ciseaux, les deux cloches et le livre de la 4e ligne coûtent alors 23 € (4 € + 12 € + 7 €). Donc les lunettes coûtent **8** € (31 € – 23 €).
Les trois lunettes et la cloche de la 3e ligne coûtent alors 30 € (24 € + 6 €). Donc une bougie coûte **1** € (31 € – 30 €).
Autre démarche : Les cinq cloches coûtent 30 euros, donc chaque cloche coûte **6** euros.
En comparant les différences entre les 2e et 3e lignes, on en déduit que le livre coûte 1 euro de plus qu'une cloche donc 7 euros.
En comparant les différences entre les deux premières lignes d'une part et les deux dernières lignes d'autre part, on déduit que les lunettes coûtent 1 euro de plus qu'un livre donc **8** euros.
Donc la 3e ligne nous permet de conclure que la bougie coûte **1** euro (31 € – 3×8 € – 6 €).

*Remarque(s) : L'observation et la mise en relation d'informations sont souvent indispensables en résolution de problèmes ; dans l'analyse d'un problème il est souvent éclairant d'identifier les invariants et les singularités ; ceux-ci ici nous ouvraient ici la voie vers la résolution du problème.*

*Prolongement : par groupes, les élèves peuvent fabriquer de tels problèmes et les proposer à d'autres groupes pour les résoudre.*

### 5) Le plus petit nombre ? ........................................................................................... 10 ✸

Réponse : **Le plus petit nombre obtenu est 11111111110.**

Solution(s) : Le nombre obtenu a 9 + 20 + 2 soit 31 chiffres. En supprimant 19 chiffres, il reste donc des écritures avec 12 chiffres pour obtenir le nombre désiré. La valeur d'un chiffre dépend de sa position dans l'écriture du nombre. Donc pour obtenir le plus petit, il s'agit de mettre « à gauche » les plus petits chiffres possibles (soient dans l'ordre 0, sinon 1, sinon 2 … 9).
1er chiffre à gauche (centaines de milliard) : en mettant 0 à gauche, nous reste-t-il 11 chiffres à sa droite ? Oui, donc mettons 0 à cette position.
2e chiffre à partir de la gauche (dizaines de milliard) : peut-on mettre le second zéro ? (non) Peut-on mettre un 1 de manière à avoir encore au moins 10 chiffres à sa droite ? (oui, donc mettons 1).
…
12e chiffre (unités) : on peut mettre le plus petit chiffre tout à droite, soit 0.
Pour obtenir le plus petit nombre possible, il s'agit donc de mettre le maximum de 0 au début puis le maximum de 1 etc.
On obtient alors ~~1234567891~~0111~~2~~1~~3~~1~~4~~1~~5~~1~~6~~1~~7~~1~~8~~1~~92~~0 soit le nombre 011 111 111 110 ou 11 111 111 110.

*Remarque(s) :*

*Il est didactiquement essentiel de distinguer un nombre de ses écritures et représentations. Ainsi écriture décimale (en base 10) avec 12 chiffres d'un nombre n'est pas synonyme d'écriture d'un « nombre à 12 chiffres » (expression courante pour « nombre – entier – dont l'écriture décimale simplifiée comporte 12 chiffres »). Ici on obtient une écriture comportant 12 chiffres qui représente un nombre à 11 chiffres.*

*Cet exercice est l'occasion de revenir sur la distinction entre chiffre et nombre. Il permet de mobiliser - explicitement comme outil de résolution de problème - la propriété suivante : « la valeur des chiffres dépend de leur positon dans l'écriture décimale d'un nombre ».*

*Prolongement : On barre 29 chiffres dans le nombre 12345…1930 obtenu en juxtaposant les écritures des nombres de 1 à 50, de manière à faire apparaître le plus petit nombre possible. Quel est-il ?*