Rallye mathématique sans frontière Midi-Pyrénées

Cycle 3 : deuxième manche

du jeudi 28 janvier 2021 (réponses)

IRES TOULOUSE

INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Toulouse Occitanie-Pyrénées

1) Le plus grand nombre ? .... 2 ✸

Réponse : **Le plus grand nombre obtenu est 951617181920.**

Le nombre donné a 9 + 20 + 2 soit 31 chiffres. Le nombre obtenu a donc 12 chiffres. Pour obtenir le plus grand nombre possible, il s'agit dans ce nombre de 12 chiffres de mettre le maximum de 9 au début puis le maximum de 8 etc. On obtient alors ~~12345678~~9~~1011121314 1~~51617181920 soit le nombre 951 617 181 920.

Remarque : Tout comme dans le problème similaire de la première manche, il s'agit de distinguer les notions de chiffre et de nombre et d'exploiter la propriété selon laquelle la valeur d'un chiffre dépend de sa position dans l'écriture décimale du nombre.

Prolongement : On barre 29 chiffres dans le nombre 12345…1930 obtenu en juxtaposant les écritures des nombres de 1 à 30, de manière à faire apparaître le plus grand nombre possible. Quel est-il ?

2) La traite des vaches .... 4 ✸

Réponse : Une vache de race **noire** donne plus de lait qu'une vache de race blanche.

Solution(s).

Dans les deux cas, il y a 5 vaches. On passe du premier cas (production de trois jours) au second cas (production en deux jours) en échangeant une vache blanche par une vache noire ; puisqu'il faut alors un jour de moins pour une même production, c'est qu'une vache noire produit plus qu'une vache blanche.

Autre solution :

Pour avoir en un jour, la même production que dans le cas de l'énoncé avec le premier troupeau en trois jours, il faut tripler le cheptel ; il faut donc 6 noires et 9 blanches.

Pour avoir en un jour, toujours la même production que le second troupeau en deux jours, il faut doubler le cheptel ; il faut donc 6 noires et 4 blanches.

Donc en un jour 6 noires et 9 blanches produisent autant que 6 noires et 4 blanches ; donc 9 blanches produisent autant que 4 blanches ; ceci n'est possible que si les blanches ne produisent pas de lait. Ce sont donc bien les vaches noires qui produisent le plus (ces ont même les seules à produire)!

Autre version de ce problème

Pour éviter ce cas particulier des vaches blanches qui ne produisent pas de lait, on peut proposer l'énoncé suivant :

"En trois jours, deux vaches noires et quatre vaches blanches donnent autant de lait que quatre vaches noires et deux vaches blanches en deux jours. Quelle race de vaches (blanche ou noire) donne le plus de lait ? »

Réponse : Les vaches noires donnent plus de lait que les vaches blanches.

Solution : Dans les deux cas, il y a 6 vaches. On passe du premier cas (production de trois jours) au second cas (production en deux jours) en échangeant deux vaches de race blanche par deux vaches de race noire ; puisqu'il faut alors un jour de moins pour une même production, c'est qu'une vache de race noire produit plus qu'une vache de race blanche.

Autre solution :

Pour avoir en un jour, la même production que dans le cas de l'énoncé avec le premier troupeau en trois jours, il faut tripler le cheptel ; il faut donc 6 noires et 12 blanches.

Pour avoir en un jour, toujours la même production que le second troupeau en deux jours, il faut doubler le cheptel ; il faut donc 8 noires et 4 blanches.

Donc en un jour 6 noires et 12 blanches (ou 6 noires et 4 blanches et 8 blanches) produisent autant que 8 noires et 4 blanches (ou 6 noires et 2 noires et 4 blanches) ; donc 2 noires produisent autant que 8 blanches soit 1 noire produit autant que 4 blanches.

Prolongement : En trois jours, deux vaches noires et quatre vaches blanches produisent 720 litres de lait.
C'est autant que quatre vaches noires et deux vaches blanches en deux jours.
Combien une vache de chaque race produit-elle chaque jour ?

3) Combien à l'étape suivante ?... 6 ✸

Réponse : À la 4^{e} étape, il faudra **63 petits cubes**.

Solution(s).

Si on dénombre les cubes utilisés par « tranches », on a :

1er solide : 1

2ème solide : 1 + (1+3+1) +1 = 1 + 5 + 1 = 7

3ème solide : 1 + 5 + (1+3+5+3+1) + 5 + 1 = 1 + 5 + 13 + 5 + 1 = 25

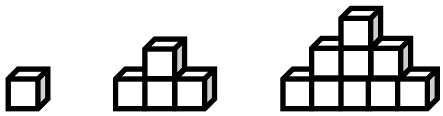
4ème solide : 1 + 5 + 13 + (1+3+5+7+5+3+1) + 13 + 5 + 1 = 1 + 5 + 13 + 25 + 13 + 5 + 1 = 63

à la 4ème étape, il faudra donc 63 cubes.

En travaillant par couches horizontales, pour obtenir le solide de la quatrième étape, il faut ajouter :

1 cube sur la première couche (au-dessus du cube du "dessus"), 4 cubes sur la deuxième, 8 cubes sur la troisième, 12 cubes sur la quatrième, 8 cubes sur la cinquième, 4 cubes sur la sixième, 1 cube sur la septième, soit 38 nouveaux cubes à ajouter au 25 du solide de l'étape n°3 : il faut donc 63 cubes en tout pour construire le solide, sur le même modèle, à la quatrième étape.

Prolongement : idem avec la série suivante :



4) Autour de triangles .... 8 ✸

Réponse : **on peut former 673 triangles satisfaisant ces propriétés.**

Les triangles équilatéraux ont les trois côtés de même longueur. Les longueurs des côtés étant des entiers, leur périmètre est donc un multiple de trois qui doit donc être inférieur à 2021. Par des essais de divisions euclidiennes ou par le critère de divisibilité, on trouve que le plus grand multiple de trois inférieur à 2021 est 2019. Cela revient donc à chercher le nombre de multiples de trois compris entre 3 (le plus petit) et 2019 (le plus grand).

On peut comprendre comment les dénombrer en les repérant dans la liste des nombres de 1 à 2019 :

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; ………………… ; 2019 ou encore 1 ; 2 ; 3×1; 4 ; 5 ; 3×2 ; ………………… ; 3×673

Les longueurs des côtés sont les entiers de 1 à 673 (2019 : 3).

Il y a donc 673 triangles équilatéraux possibles.

Remarque(s) : Pour s'aider en réalisant des expériences, on peut traiter un problème plus simple en choisissant par exemple un problème avec un périmètre inférieur à 20 cm. On le résout en essayant de dégager un modèle pour résoudre le problème initial.

Prolongement : Et si on dénombrait les carrés satisfaisant les conditions de l'énoncé ?

5) Rendre la monnaie .... 10 ✸

Réponse : **il y a 12 façons de rendre la monnaie avec ces contraintes.**

Avec une pièce de 1 € : (1 € + 10 c)
Avec deux pièces de 50 c : (50 c + 50 c + 10 c)
Avec une pièce de 50 c : (50 c + 20 c + 20 c + 20 c) ou (50 c + 20 c + 20 c + 10 c + 10 c) ou
(50 c + 20 c + 10 c + 10 c+ 10 c + 10 c) ou (50 c + 10 c + 10 c + 10 c + 10 c+ 10 c + 10 c)
Avec des pièces de 20 c et de 10 c : (20 c + 20 c + 20 c + 20 c + 20 c + 10 c) ou
(20 c + 20 c + 20 c + 20 c + 10 c + 10 c+ 10 c) ou (20 c + 20 c + 20 c + 10 c + 10 c + 10 c + 10 c+ 10 c) ou
(20 c + 20 c + 10 c + 10 c + 10 c + 10 c + 10 c + 10 c+ 10 c) ou
(20 c + 10 c + 10 c + 10 c + 10 c + 10 c + 10 c + 10 c + 10 c+ 10 c) ou
(10 c + 10 c + 10 c + 10 c + 10 c + 10 c + 10 c + 10 c + 10 c + 10 c+ 10 c)
soit 12 façons d'obtenir 1,10 euros avec des pièces de 1 euro et de 10, 20, 50 centimes.

Remarque sur la méthodologie et l'organisation de la recherche : on peut organiser sa recherche en commençant systématiquement par choisir le plus de pièces de la plus grande valeur

Pièces de 1€	*Pièces de 50c*	*Pièces de 20c*	*Pièces de 10c*
1	*0*	*0*	*1*
	2	*0*	*1*
	1	*3*	*0*
	1	*2*	*2*
	…	*…*	*…*

Prolongement : Combien de pièces de chaque sorte dois-je avoir au minimum dans ma caisse afin de pouvoir rendre n'importe quelle somme inférieure à 10 euros ? (1c, 1c, 2c, 5c, 10c, 10c, 20c, 50 c)