# Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées

IRES TOULOUSE

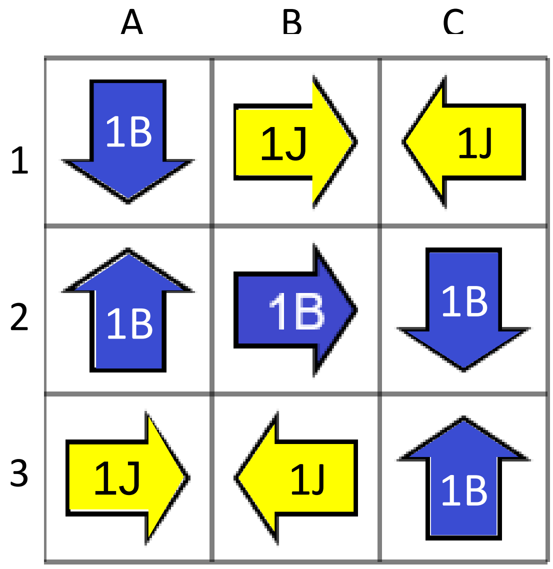
## Cycle 3 : première manche (réponses)

du mardi 23 novembre 2021

INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Toulouse Occitanie-Pyrénées

### 1) Les bonnes couleurs ................................ 2 ✸

**Réponse : Il y a 4 flèches jaunes.**




Solutions (méthodes non hiérarchisées) :

La flèche centrale nous indique que la flèche en C2 est nécessairement bleue. Celle-ci nous dit alors que la flèche en C3 est aussi bleue et comme cette dernière indique qu'il n'y a qu'une seule flèche bleue devant elle, la flèche en C1 est nécessairement jaune. Par suite la couleur de la flèche en B1 correspond à la couleur de la flèche devant elle, soit celle de la flèche en C1 qui est jaune, donc la flèche B1 est jaune (N.B. la couleur de B1 peut aussi se trouver par examen des deux couleurs potentielles pour B1 ou par disjonction des cas, la jaune sur la première ligne est soit en A1 soit en B1). Ensuite A1 est nécessairement bleue. Puis A2 est bleue et donc A3 est nécessairement jaune et par conséquent B3 est aussi jaune. Au final, on dénombre 4 flèches jaunes.

Autre méthode :

À partir de l'énoncé, on peut mettre en évidence le fait que deux flèches dans deux cases contiguës qui sont dirigées l'une vers l'autre sont nécessairement de la même couleur. Dans ce cas, on peut conclure que la flèche située sur la troisième case de la ligne ou de la colonne considérée est de l'autre couleur. En examinant la couleur de la flèche en B2, on peut conclure que la flèche en C2 est bleue. Les deux flèches en C2 et en C3 sont dirigées l'une vers l'autre, elles sont donc bleues et de fait, la flèche en C1 est jaune. Puis la flèche en B1 est jaune, celle en A1 bleue. Puis, celle en A2 est bleue et celle en A3 est jaune. Enfin, celle en B3 est jaune. Soit au total 4 flèches jaunes.

*Remarques :*

*Ces problèmes de logique permettent de travailler diverses inférences mêlant des informations numériques (1 flèche de cette couleur parmi celle(s) devant elle) et spatiales (orientation de chaque flèche dans le plan).*

*Ce problème met en exergue que souvent une information explicite nous fournit également implicitement une autre information sur son complémentaire (si on a une flèche jaune devant, alors les autres flèches sont bleues).*

Prolongement : Pour trouver des exercices variés permettant de s'exercer, rendez-vous à l'adresse suivante https://concours.castor-informatique.fr/ . Vous retrouverez celui-ci dans la rubrique « S'entraîner », Castor 2018.

### 2) Quels nombres ? .................................... 4 ✸

Réponse : **On a écrit 282 fois le chiffre « 5 ».**

Solutions (méthodes non hiérarchisées) :

1ère méthode :

Au rang des milliers, pas de chiffre « 5 ».

Au rang des centaines, on trouve 40 chiffres « 5 » : 20 de 500 à 595 et 20 de 1500 à 1595.

Au rang des dizaines on a 2 chiffres « 5 » par centaine : (…50 et …55) soit pour les 20 centaines $2 \times 20$ jusqu'à 2000.

Au rang des unités simples on a 10 chiffres « 5 » par centaine : (…05 ;…15 ;…25 ;…35 ;…45 ;…55 ;…65 ;…75 ;…85 ;…95) soit pour les 20 centaines $20 \times 10$ jusqu'à 2000 auxquels il faut ajouter 2 chiffres « 5 » (pour 2005 et 2015).

Soit au total $(20 + 20) + 2 \times 20 + 20 \times 10 + 2 = 282$ (chiffres « 5 »).

Méthode 2 (en raisonnant par “tranches” de 100) :
Dans chaque centaine il y a 20 multiples de 5, le chiffre “5” apparaissant 10 fois au rang des unités et 2 fois au rang des dizaines.
Par centaine, on a donc 12 fois l'occurrence du “5”, sauf dans le cas de 500 où on rajoute 20 occurrences (pour le chiffre des centaines).
Entre 0 et 1000, il y a donc $(12 \times 10) + 20$ chiffres “5” qui apparait donc 140 fois.
Entre 1000 et 2000, c'est la même chose, le “5” apparait 140 fois.
Entre 2000 et 2020, le “5” n'apparait que 2 fois (dans 2005 et 2015).
Donc au total, le chiffre “5” apparaît au nombre d'occurrences suivant : $140 + 140 + 2 = 282$.

*Remarques :*
*Ce problème permet de revenir et de travailler sur l'aspect algorithmique de la suite des multiples de 5. Parfois les critères de divisibilité occultent la conception relative à la notion de multiple.*
*Ce problème peut être traité en réduisant la “zone” de recherche pour observer des répétitions de “5” entre deux bornes que l'on définit afin d'y effectuer un dénombrement plus simple et plus sûr, dans le but de généraliser ensuite à la “zone” de l'énoncé.*

Prolongements : On a écrit les uns à la suite des autres tous les multiples de 5 inférieurs à 2021. Combien de fois a-t-on écrit le chiffre « 0 » ?

On a écrit les uns à la suite des autres tous les multiples de 10 inférieurs à 2021. Combien de fois a-t-on écrit le chiffre « 0 » ?

### 3) Tous triangles ..........................................6 ✸

Réponse : **On a pu construire 3 triangles non aplatis.**

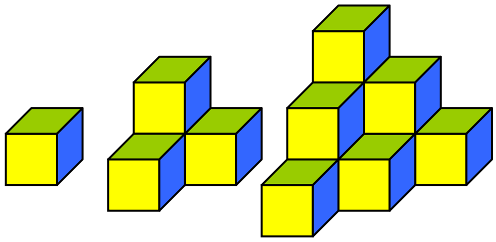
Solutions (méthodes non hiérarchisées) :
Méthode par exhaustion des cas. On s'organise dans un premier temps pour examiner tous les triplets de nombres entiers naturels dont la somme est égale à 9.
On écrit les décompositions en ordonnant les trois nombres dans l'ordre croissant.
On cherche les décompositions dans lesquelles apparaissent en première position le 1, puis le 2, puis le 3 : 1+1+7 ; 1+2+6 ; 1+3+5 ; 1+4+4 ; 2+2+5 ; 2+3+4 ; 3+3+3.
On peut aussi s'organiser en commençant par les décompositions dans lesquelles figurent les plus grands nombres possibles en première position : 7+1+1 ; 6+2+1 ; 5+3+1 ; 5+2+2 ; 4+4+1 ; 4+3+2 ; 3+3+3.
Pour qu'un triplet corresponde bien aux mesures des longueurs des côtés d'un triangle non aplati, il faut que le plus grand des trois nombres soit strictement inférieur à la somme des deux autres.
In fine avec ces contraintes, on peut construire 3 triangles différents. Ils ont pour mesures en cm : (1;4;4) ; (2;3;4) ; (3;3;3).

*Remarques : ce problème permet de découvrir en acte l'inégalité triangulaire ; on ne peut construire un triangle que si la longueur de chacun de ses côtés n'est pas supérieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.*
*On pourra faire remarquer que deux triangles différents (non superposables) peuvent avoir le même périmètre.*
*En fin de cycle, cela pourrait être le prétexte de découvrir ou revoir les constructions de triangles aux instruments (compas...).*

Prolongement : Construire un triangle qui a même périmètre qu'un carré de côté 4 cm. (*On pourra alors observer que « forme » et « périmètre » sont indépendants, que des figures différentes peuvent avoir le même périmètre*).

**4) De bonnes vues ....................................... 8 ✸**

Réponse : **On peut voir 50 faces de petits cubes.**



Solutions (méthodes non hiérarchisées) :
1ère méthode : On construit les assemblages avec des cubes disponibles dans la classe et on dénombre les faces visibles des petits cubes selon les divers points de vue.
2e méthode : en tournant autour du petit cube isolé, on peut observer 5 faces (les six faces du cube moins la face de dessous).
En tournant autour du 2e empilement, on peut observer de dessus (3 faces de petits cubes), de devant – dite de face – (3 faces de petits cubes), de derrière (3 faces de petits cubes), de gauche (3 faces de petits cubes) et de droite (3 faces de petits cubes), soit 15 faces de petits cubes pour le 2e empilement.
En tournant autour du 3e empilement, on peut observer de dessus (6 faces de petits cubes), de face (6 faces de petits cubes), de derrière (6 faces de petits cubes), de gauche (6 faces de petits cubes) et de droite (6 faces de petits cubes), soit 30 faces de petits cubes pour le 3e empilement.
Les faces de dessous n'étant pas visibles, on dénombre au total $5 + 3 \times 5 + 6 \times 5$ soit 50 faces de petits cubes.
3e méthode : On peut également dénombrer les faces contenues dans chaque plan horizontalement et verticalement.

*Remarques :*
*Ce problème mobilise des changements de points de vue par rapport à celui de la représentation fournie. Il incite à organiser le dénombrement selon divers points de vues complémentaires qui s'appuient sur les trois directions conventionnelles de l'espace (ici vues de face, de derrière, de dessus, de gauche et de droite).*
*On notera qu'un coloriage judicieux tel celui ci-dessus facilite le dénombrement en distinguant par les couleurs les vues de dessus, de côté et de face.*

Prolongement : Combien utiliserait-on de cubes pour le 4e empilement ? pour le 5e empilement ? ... Combien de faces de petits cubes sont-elles visibles de dessus pour chaque empilement ?

**5) Quel temps combien de temps ? ............ 10 ✸**

Réponse : **Il y a eu deux journées entières sans pluie.**

Solutions (méthodes non hiérarchisées) :

- Méthode arithmétique : Il y a 8 demi-journées sans pluie (4 matinées et 4 après-midi) et 4 demi-journées pluvieuses, donc en tout 12 demi-journées soit un séjour de 6 jours. Soit 2 matinées sans pluie et 2 après-midis sans pluie. Sachant qu'il n'a pas plu à la fois le matin et l'après-midi, il y a donc deux journées avec pluie le matin et pas de pluie l'après-midi ; les deux après-midis non pluvieuses correspondent alors à deux matinées non pluvieuses, soit 2 journées sans pluie.
- Autres méthodes arithmétiques (par abandon temporaire d'une contrainte sur les quatre de l'énoncé)
  Compte tenu des contraintes, il y a au moins 4 jours dans le séjour.
  - Abandon provisoire de la contrainte sur le nombre de demi-journées pluvieuses

| Nombre de jours -> | si 4 jours | si 5 jours | si 6 jours |
|---|---|---|---|
| Nombre de matinées sans pluie | 4 | 4 | 4 |
| Nombre d'après-midis sans pluie | 4 | 4 | 4 |
| Nombre de demi-journées pluvieuses | 0<br>(impossible) | 2<br>(une matinée pluvieuse sur les 5 et une après-midi pluvieuse sur les 5) | 4<br>(2 matinées pluvieuses sur les 6 et 2 après-midis pluvieuses sur les 6) |

Sachant qu'il n'a pas plu à la fois le matin et l'après-midi, il y a donc deux journées avec pluie le matin et pas de pluie l'après-midi ; les deux après-midis non pluvieuses correspondent alors à deux matinées non pluvieuses, soit 2 journées sans pluie.

- Abandon provisoire de la contrainte sur le nombre d'après-midis sans pluie

| Nombre de jours -> | si 4 jours | si 5 jours | si 6 jours |
|---|---|---|---|
| Nombre de matinées sans pluie | 4 | 4 | 4 |
| Nombre de demi-journées pluvieuses | 4 | 4 | 4 |
| Nombre d'après-midis sans pluie | 0<br>(impossible) | 2<br>(une matinée pluvieuse sur les 5 et 3 après-midis pluvieuses sur les 5, d'où 2 après-midis sans pluie) | 4<br>(2 matinées pluvieuses sur les 6 et 2 après-midis pluvieuses sur les 6, d'où 4 après-midis sans pluie) |

Sachant qu'il n'a pas plu à la fois le matin et l'après-midi, il y a donc deux journées avec pluie le matin et pas de pluie l'après-midi ; les deux après-midis non pluvieuses correspondent alors à deux matinées non pluvieuses, soit 2 journées sans pluie.

- Abandon provisoire de la contrainte sur le nombre de matinées sans pluie

| Nombre de jours -> | si 4 jours | si 5 jours | si 6 jours |
|---|---|---|---|
| Nombre d'après-midis sans pluie | 4 | 4 | 4 |
| Nombre de demi-journées pluvieuses | 4 | 4 | 4 |
| Nombre de matinées sans pluie | 0<br>(impossible) | 2<br>(un après-midi pluvieux sur les 5 et 3 matinées pluvieuses sur les 5, d'où 2 matinées sans pluie) | 4<br>(2 après-midis pluvieux sur les 6 et 2 matinées pluvieuses sur les 6, d'où 4 matinées sans pluie) |

Sachant qu'il n'a pas plu à la fois le matin et l'après-midi, il y a donc deux journées avec pluie le matin et pas de pluie l'après-midi ; les deux après-midis non pluvieuses correspondent alors à deux matinées non pluvieuses, soit 2 journées sans pluie.

- Méthodes par essais rectifications soit sur une représentation graphique soit dans un tableau avec les nombres de matinées et d'après-midis pluvieux et sans pluie.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Matin | Sans pluie | Sans pluie | Sans pluie | Sans pluie | | | | |
| Après-midi | | | **Sans pluie** | **Sans pluie** | Sans pluie | Sans pluie | ~~**Sans pluie**~~ | ~~**Sans pluie**~~ |

- Méthode par ajustements numériques

Supposons qu'il ne pleuve pas à la fois le matin et l'après-midi, nous aurions un séjour de 8 journées, ce qui donnerait 8 demi-journées sans pluie et donc 8 demi-journées pluvieuses, ce qui n'est pas possible. À chaque fois qu'on complète une matinée sans pluie par une après-midi sans pluie, on supprime une journée dans le séjour fictif. Il faut le faire deux fois pour respecter toutes les contraintes, ce qui nous donne deux journées entières sans pluie.

Diverses interprétations de l'affirmation « il n'a pas plu 4 matins » comme « le nombre de matins pluvieux n'est pas 4 », sont possibles ; elles conduisent à d'autres réponses qui ont été prises en compte par le jury lors des corrections.

*Remarque :*

*LOGIQUE : « S'il pleut le matin alors il ne pleut pas l'après-midi » admet pour proposition équivalente sa contraposée qui est « s'il pleut l'après-midi alors il ne pleut pas le matin ». Ainsi ces deux propositions signifient qu'il est impossible d'avoir des journées entières de pluie. Cependant, la réciproque « s'il ne pleut pas le matin, alors il pleut l'après-midi » n'est pas forcément vraie, ce qui signifie qu'on peut avoir éventuellement, des journées entièrement ensoleillées.*

Prolongement :
Un jeu de vrai-faux conduisant à examiner des inférences : par exemple « S'il pleut alors le ciel est nuageux » étant considérée comme vraie, parmi les affirmations suivantes, quelles sont celles qui sont vraies ?

- « Si le ciel n'est pas nuageux alors il ne pleut pas »
- « Si le ciel est nuageux alors il pleut »
- « Si il ne pleut pas alors le ciel n'est pas nuageux »