Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées

Cycle 3 : troisième manche (réponses)

du jeudi 16 mars 2023

IRES TOULOUSE

INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Toulouse Occitanie-Pyrénées

1) Qui suis-je ? ....2 ✸

Je suis un nombre non nul. Quand on écrit mon chiffre des dizaines, on obtient un nombre qui est le tiers de mon nombre de centaines ; j'ai autant de milliers que la valeur de mon chiffre des unités et j'ai douze fois plus de centaines que la valeur de mon chiffre des unités ; qui puis-je être ?

Réponse : **je suis 1241 ou 2482.**

Solutions : j'ai autant de milliers que la valeur de mon chiffre des unités, donc mon nombre de milliers est un nombre à un chiffre, donc je suis un nombre à quatre chiffres (ou à trois chiffres si mon chiffre des unités est 0). Mon nombre de centaines est donc un nombre à 2 chiffres qui est un multiple de 12 et inférieur à 30 (son tiers est un nombre entier à un chiffre). Il n'y a que trois multiples de 12 satisfaisant à ces contraints pour le nombre de centaines (00 ou 12 ou 24). Le chiffre des milliers et le même que celui des unités.

00 conduit à un nombre nul exclu par l'énoncé, reste alors les deux solutions 1241 et 2482 qui satisfont toutes les contraintes.

On pouvait aussi procéder par exhaustion des cas, en examinant les 10 cas possibles pour le chiffre des unités et en reconstruisant, lorsque c'est possible, le nombre à l'aide des informations de l'énoncé.

On pouvait aussi lister les multiples de 12 non nuls à deux chiffres : 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84 et 96.

Si le chiffre des unités est 1 alors le nombre est 1241

Si le chiffre des unités est 2 alors le nombre est 2482

Si le chiffre des unités est 3 alors le nombre est 36..3 ; or 36 : 3 = 12 qui est supérieur à un nombre à un chiffre ; on constate rapidement qu'il en sera de même pour u plus grand, ce qui permet d'arrêter la recherche.

On en déduit qu'il n'y a que deux solutions **1241 ou 2482**.

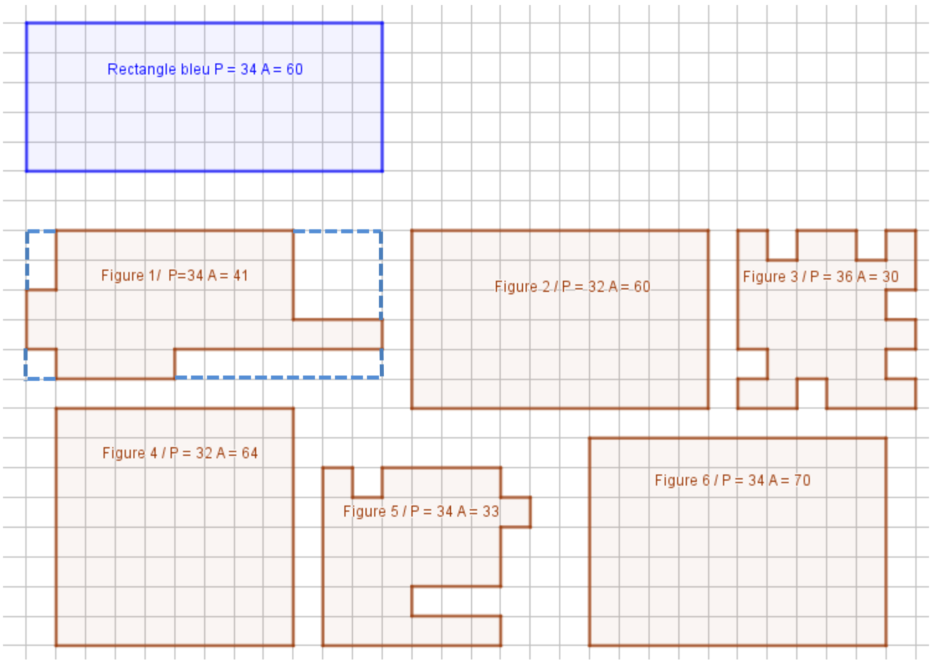
Remarque : ces situations permettent de manipuler les nombres, les décomposer et recomposer, de les mettre relation avec d'autres nombres.

Prolongements : faire fabriquer des exercices analogues aux élèves qui doivent ensuite se le poser entre eux.

2) Créneaux et merlons dans tous les sens .... 4 ✸

Quelles sont les figures qui ont le même périmètre que le rectangle bleu ci-dessus ?

Réponse : **les figures 1, 5 et 6 ont le même périmètre que le rectangle bleu.**



Solutions : on peut procéder par déplacement de segments frontières de la figure en essayant de retrouver le rectangle bleu ; des déplacements horizontalement ou verticalement des segments (à périmètre égal) permettent de retrouver le rectangle bleu (voir par exemple la figure 1 ci-contre).

On peut procéder par comptage en prenant comme unité de longueur la longueur d'un côté d'un carreau.

On peut également pour les rectangles (dont un est carré), utiliser une formule si on la connait.

On obtient alors

$P_{(\text{rectangle bleu})} = 34 = P_{(\text{figure 1})} = P_{(\text{figure 5})} = P_{(\text{figure 6})}$ et $P_{(\text{figure 2})} = P_{(\text{figure 5})} = 32$; $P_{(\text{figure 3})} = 30$.

Remarque : cette situation peut servir de point de départ pour construire la distinction entre les grandeurs aire et périmètre.

Prolongements : Construire une figure de périmètre plus grand et d'aire plus petite qu'une figure donnée.
Construire une figure de périmètre plus petit et d'aire plus grande qu'une figure donnée.
Construire une figure de périmètre donné … et d'aire donnée …
Construire deux figures non superposables de même périmètre et de même aire.

3) Les dix amis à la fête de l'école ....6 ✸

Un groupe de 10 amis se restaure à la fête de l'école. Chacun prend un sandwich et une boisson à choisir entre un jus d'orange et une eau gazeuse. En sachant que le sandwich coûte 1,80 €, le jus d'orange 0,70 € et l'eau gazeuse 0,50 €, parmi les montants suivants quels sont ceux que le groupe a pu avoir à payer ?

21,20 € ; 22,80 € ; 23,50 € ; 23,80 € ; 24,60 € ; 25,20 € ; 26 €

Réponse : **le groupe a pu payer 23,80 € ou 24,60 €.**

Solutions :

On peut procéder par exhaustion des cas (examen de tous les possibles) en construisant par exemple le tableau ci-contre.

On peut également trouver les réponses possibles dans la liste donnée. On remarque que la somme est comprise entre 23 € (ils prennent tous une eau gazeuse) et 25 € (ils prennent tous un jus d'orange). Si on suppose qu'ils ne prennent que des eaux gazeuses, ils paient 23 € ; or chaque fois qu'on remplace une eau gazeuse par un jus d'orange, la somme à payer augmente de 0,20 €, donc les seuls montants possibles sont 23,80 € et 24,60 € (23,50 € est exclu puisque la différence avec 23 € n'est pas multiple de 0,20 €).

On peut aussi construire un tableau similaire avec les prix des boissons après avoir retiré 18 € à chaque montant.

Sandwich 1,80 €	jus d'orange 0,70 €	eau gazeuse 0,50 €	somme totale
10	10	0	25,00 €
10	9	1	24,80 €
10	8	2	24,60 €
10	7	3	24,40 €
10	6	4	24,20 €
10	5	5	24,00 €
10	4	6	23,80 €
10	3	7	23,60 €
10	2	8	23,40 €
10	1	9	23,20 €
10	0	10	23,00 €

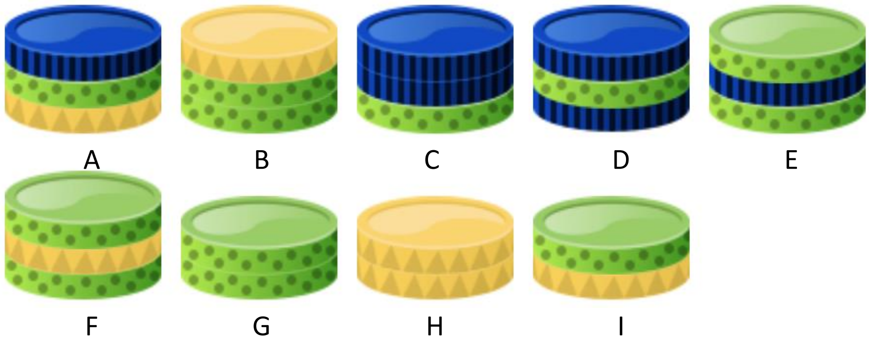
Prolongements : proposer des situations du type Golf (Ermel CM2).

Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées

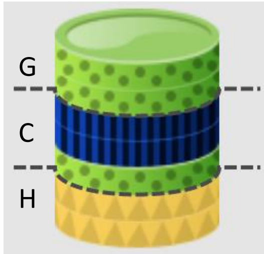
Cycle 3 : troisième manche (réponses)

du jeudi 16 mars 2023

4) Empilements .... **8 ✸**



On dispose des neuf blocs de jetons collés ici à gauche, qu'on ne peut pas décoller.
Construire deux tours identiques (mêmes motifs dans le même ordre, même hauteur) en empilant les blocs sans les retourner ; il faut tous les utiliser, chaque bloc pouvant être utilisé une seule fois.
(Source : Castor informatique France)

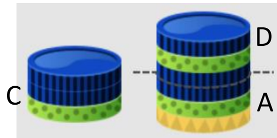


Pour coder les empilements de votre réponse, à titre d'exemple, l'empilement ci-contre serait noté H–C–G

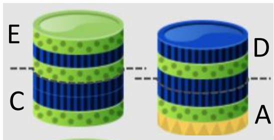
Réponse : **Les deux tours sont codées B–A–D–F et G–H–C–E–I .**

Solutions :

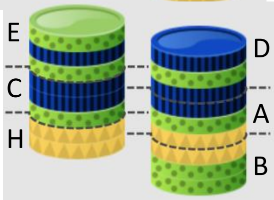
- On peut procéder par tâtonnements en découpant les blocs fournis en annexes (si la classe a un TBI-TNI, elle peut afficher le document, capturer les blocs à l'écran et faire des essais en déplaçant les blocs capturés).
- On peut aussi raisonner en remarquant qu'en tout il y a 24 jetons donc nécessairement 12 jetons dans chaque tour.
  Il y a 6 jetons bleus (donc 3 dans chaque tour) ; donc les blocs C et D sont dans deux tours différentes). Il y a 6 jetons jaunes (donc 3 dans chaque tour) ; de même, Il y a 12 jetons verts (donc 6 dans chaque tour).

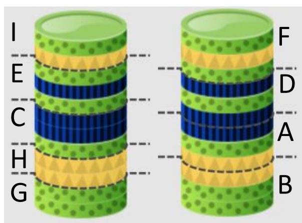
  La superposition des deux jetons bleus du bloc C ne peut se faire dans l'autre tour qu'en mettant le bloc D sur le bloc A.

  La mise en correspondance des deux tours montre que le bloc E est nécessairement sur le bloc C (afin d'avoir au-dessus du bloc C un jeton vert et un jeton bleu).

  Chaque tour, à cette étape du raisonnement, comprend 6 jetons que l'on doit compléter pour obtenir douze jetons dans chacune, ceci avec 2 blocs de 3 jetons et 3 blocs de 2 jetons ; cela ne peut se réaliser qu'en mettant les trois blocs de deux jetons dans une tour et les deux blocs de trois jetons restants dans l'autre.
  La comparaison des deux tours en construction montre qu'il y a nécessairement un jeton jaune en haut du bloc situé sous le bloc C (donc soit le bloc B soit le bloc H) ; choisir de mettre le bloc B (et par conséquent aussi le bloc F – les deux blocs de trois jetons restant ensembles –) met dans cette tour 2 jetons jaunes (et non 3 comme attendu) et 7 jetons verts (et non 6 comme attendu), ce qui n'est pas possible ; donc le bloc H est alors nécessairement sous le bloc C et subséquemment le seul bloc qui puisse être sous le bloc A est le bloc B.

  On poursuit le raisonnement par comparaison des deux tours en construction, s'en suit alors le bloc G sous le bloc H, puis le bloc F sur le bloc D et enfin le bloc I sur le bloc E.
  On obtient alors les deux tours G–H–C–E–I et B–A–D–F.
  D'autres raisonnements sont possibles ; remarquons également que seul le bloc D a un jeton bleu en bas, donc les jetons en bas de chaque tour ne sont pas bleus.

Remarques : On pourra faire remarquer qu'une observation et une analyse des blocs fournit un raisonnement qui limite sensiblement le nombre d'essais.

Prolongements : vous trouverez d'autres défis d'empilements sur le site (Castor informatique France) (Accès aux sujets / S'entrainer / castor 2021 /tours pareilles).

5) Les cartes ....10 ✸

Tom et Lisa ont 24 cartes à eux deux ; ils comparent leurs nombres de cartes. Tom dit à Lisa : « si je te donne 5 de mes cartes, tu en auras deux fois plus que moi ». Lisa répond à Tom : « oui, mais si moi je te donne 5 de mes cartes, toi tu en auras trois fois plus que moi… ». Combien chacun a-t-il de cartes ?

Réponse : **Tom a 13 cartes et Lisa a 11 cartes**.

Solutions : Si chacun peut donner 5 cartes à l'autre, c'est qu'ils ont au moins 5 cartes chacun.

On peut examiner tous les cas possibles et vérifier les deux conditions (double et triple) :

initialement		Lorsqu'ils font le premier échange		Lorsqu'ils font le deuxième échange	
Tom	Lisa	Tom	Lisa	Tom	Lisa
5	19	0	24	10	14
6	18	1	23	11	13
7	17	2	22	12	12
8	16	3	21	13	11
9	15	4	20	14	10
10	14	5	19	15	9
11	13	6	18	16	8
12	12	7	17	17	7
13	11	8	16	18	6
14	10	9	15	19	5
15	9	10	14	20	4
16	8	11	13	21	3
17	7	12	12	22	2
18	6	13	11	23	1
19	5	14	10	24	0

Remarques : ce problème est beaucoup plus difficile que son énoncé ne le laisserait penser ; il convoque ici des comparaisons multiplicatives ; habituellement, parmi l'état de référence, la comparaison et l'état référé, en connaissant deux d'entre eux, on doit retrouver le·a troisième. On peut aussi composer des comparaisons. Mais ici il s'agit de trouver les états à partir de deux comparaisons après transformation.

Prolongement : Tom et Lisa ont 24 cartes à eux deux. Tom dit à Lisa « si tu me donnes 2 de mes cartes, tu en auras deux fois moins que moi ». Lisa répond à Tom : « oui, mais si moi je te donne 2 de mes cartes, toi tu en auras autant que moi… ». Combien chacun a-t-il de cartes ?