

# Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées



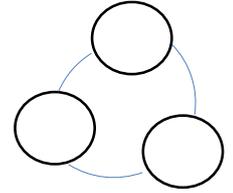
Cycle 3 : troisième manche (réponses)

du jeudi 14 mars 2024



## 1) Les trois font treize ..... 2 \*

Dans chaque bulle, Laurence souhaite écrire un nombre inférieur à cinq ; les trois nombres doivent être tous différents. Quand elle les ajoute, elle veut obtenir 13. Lilou pense que ce n'est pas possible ; Noam dit qu'il y a une seule solution et Enzo dit qu'il a plusieurs solutions. Qui a raison ?



**Réponse : Enzo a raison**

**Solution :** une première approche permet rapidement de répondre qu'il n'existe pas de solution dans les nombres entiers. En effet,  $5 + 4 + 3 = 12$ . Cependant, il est nécessaire de considérer également les nombres décimaux. On peut alors aisément trouver une solution, par exemple  $5 + 4,5 + 3,5 = 13$  ou  $4,5 + 4,3 + 4,2 = 13$ . Il y a donc plusieurs solutions. Entre deux nombres décimaux, on peut toujours intercaler un nombre décimal, il y a donc autant de solutions que l'on veut (une infinité).

*Remarque : dans les problèmes, il est nécessaire de ne pas s'imposer des contraintes qui ne sont pas présentes dans l'énoncé (pensée convergente). Par exemple, construire quatre triangles équilatéraux avec 6 allumettes est impossible dans le plan, il suffit pourtant de construire un tétraèdre.*

*Prolongement : trouver un nombre compris en 3 et 4 ? et entre 3,8 et 3,9 ?*

## 2) L'effectif de la classe ..... 4 \*

Dans une classe de cycle 3, tous les élèves ont le même âge sauf six qui ont un an de plus et deux qui ont un an de moins. Si on ajoute les âges des élèves on trouve 238. Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?

**Réponse : il y a 26 élèves dans cette classe.**

**Solution :** prenons l'exemple d'une classe de 15 élèves, 7 de 10 ans, 2 de 9 ans (10 ans - 1 an) et 6 de 11 ans (10 ans + 1 an). Pour calculer la somme de leurs âges, on écrirait :

$$10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 - 1 + 10 - 1 + 10 + 1 + 10 + 1 + 10 + 1 + 10 + 1 + 10 + 1 + 10 + 1 = 15 \times 10 + 4.$$

238 représente donc 4 de plus que le produit du nombre d'élèves de la classe par l'âge de la majorité d'entre eux.

Il est nécessaire de décomposer 234 ( $238 - 4$ ) en produits de nombres. C'est un nombre pair donc  $234 = 2 \times 117$ . Après quelques essais, on trouve que  $117 = 9 \times 13$  soit  $234 = 2 \times 9 \times 13$ .

Selon le niveau de la classe, on choisit le produit  $234 = 9 \times 26$  soit 26 élèves dans cette classe, 18 ayant 9 ans, 2 ayant 8 ans et 6 ayant 11 ans.

*Prolongement : même problème dans le cas où le niveau de classe n'est pas précisé.*

## 3) Le chemin de l'école ..... 6 \*

Quatre amies discutent :

- Alice dit « pour venir à l'école, j'ai compté 4 000 pas et chacun de mes pas a une longueur comprise entre 65 cm et 70 cm ».
- Claire répond « moi, pour venir à l'école, je mets 30 minutes et en une minute, je parcours entre 60 et 70 mètres ».
- Manon réplique : « en ce qui me concerne, exactement 400 mètres après avoir quitté la maison, je passe devant un panneau où il est inscrit : École 1,800 km »
- Jade parle à son tour : « il me faut 6 minutes pour venir à l'école à vélo et durant tout le trajet le compteur de mon vélo indique entre 23 et 25 km/h ».

Laquelle habite le plus près de l'école et laquelle habite le plus loin de l'école ?

**Réponse : Claire habite le plus près de l'école et Alice le plus loin.**

# Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées



Cycle 3 : troisième manche (réponses)

du jeudi 14 mars 2024



Solution :

Alice parcourt entre  $4000 \times 65$  cm et  $4000 \times 70$  cm.

$4000 \times 65$  cm =  $40 \times 100 \times 65$  cm =  $40 \times 65 \times 100$  cm =  $40 \times 65$  m = 2 600 m (puisque on sait que 100 cm = 1 m).

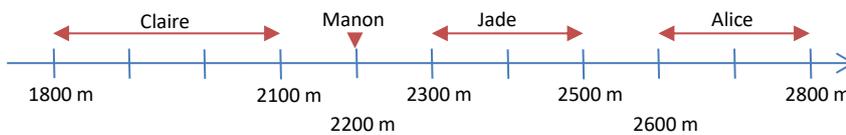
De même,  $4000 \times 70$  cm =  $40 \times 100 \times 70$  cm =  $40 \times 70 \times 100$  cm =  $40 \times 70$  m = 2 800 m.

La longueur du trajet d'Alice est donc comprise entre 2 600 m et 2 800 m.

Claire marche à une vitesse comprise entre 60 m et 70 m en une minute. Le trajet dure 30 min (30 fois plus qu'une minute), sa longueur est donc comprise entre  $30 \times 60$  m et  $30 \times 70$  m soit entre 1 800 m et 2 100 m.

La longueur du trajet de Manon est  $1,8$  km +  $400$  m =  $1 800$  m +  $400$  m =  $2 200$  m.

En une heure, Jade parcourt entre 23 km et 25 km. 6 min, c'est 10 fois moins qu'une heure donc en 6 minutes, Jade parcourt entre 2,3 km (10 fois moins que 23 km) et 2,5 km (10 fois moins que 25 km) soit entre 2 300 m et 2 500 m.



Remarque : dans le calcul  $4000 \times 65$  cm, on mobilise des connaissances des relations entre différentes unités de mesures de longueur (100 cm = 1 m) puis en numération ( $4000 = 40 \times 100$ ) pour pouvoir combiner les deux en vue de simplifier les calculs.

Prolongement : on peut proposer des problèmes mobilisant d'autre grandeurs, par exemple des contenances et des débits.

## 4) Les sachets de billes ..... 8 \*

Lucas et Martin comparent leurs sachets de billes. Lucas a deux fois plus de billes que Martin mais si Lucas donnait trois de ses billes à Martin, ils auraient le même nombre de billes ; si à l'inverse, Martin avait donné trois de ses billes à Lucas, Lucas aurait cinq fois plus de billes que Martin.

Combien Lucas et Martin ont-ils de billes chacun ?

Réponse : Lucas a 12 billes et Martin 6 billes

Solution : « si Lucas donnait trois de ses billes à Martin, ils auraient le même nombre de billes » : on peut en déduire que l'écart entre le nombre de billes de chacun est de 6 billes.

On cherche donc deux nombres, l'un double de l'autre (Lucas a deux fois plus de billes que Martin) dont l'écart est 6. L'écart est aussi égal au plus petit des deux nombres. On en déduit que le plus petit des deux nombres est égal à 6. Donc Martin a 6 billes et Lucas en a 12.

Autre possibilité : on peut choisir des nombres et leur double puis vérifier les uns après les autres si le nombre augmenté de 3 et son double diminué de 3 sont égaux. Le tableau ci-contre est réalisé avec un tableur, c'est l'occasion d'utiliser un instrument de calcul qui permet de traiter efficacement les solutions par une recherche exhaustive. Les formules de la ligne 3 (colonnes C, D et E) ont été saisies puis recopiées vers le bas.

	A	B	C	D	E
1					
2		Un nombre	Son double	Le nombre augmenté de 3	Son double diminué de 3
3		2	4	5	1
4		3	6	6	3
5		4	8	7	5
6		5	10	8	7
7		6	12	9	9
8		7	14	10	11
9		8	16	11	13
10		9	18	12	15
11		10	20	13	17
12		11	22	14	19
13		12	24	15	21
14		13	26	16	23
15		14	28	17	25
16		15	30	18	27
17		16	32	19	29
18					

	A	B	C	D	E
1					
2		Un nombre	Son double	Le nombre augmenté de 3	Son double diminué de 3
3		2	=2*B3	=B3+3	=C3-3
4		3	=2*B4	=B4+3	=C4-3

Remarque : la deuxième contrainte n'est pas nécessaire pour la résolution, il faut toutefois vérifier qu'elle est bien satisfaite pour la solution trouvée.

Prolongement : voir le problème 2 de la manche 3 au rallye 2017.

# Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées



Cycle 3 : troisième manche (réponses)

du jeudi 14 mars 2024



## 5) Le bon code ..... 10 \*

- *Énigme 1* : dans l'opération suivante,

$\square$  et  $\Delta$  représentent chacun un chiffre différent.

$$\Delta 7 - \square \Delta = 3 \square$$

Quel est son résultat ?

**Réponse : le résultat est 32.**

*Solution* : en examinant les nombres en jeu dans cette opération, on remarque qu'ils ont tous deux chiffres, on en déduit donc qu'au rang des dizaines,  $3 + \square = \Delta$ . On peut en déduire que  $\square$  est au maximum 6. Au rang des unités, une retenue pourrait être présente, il faudrait que  $\square + \Delta = 17$  soit  $9 + 8 = 17$ . C'est impossible compte tenu de la conclusion précédente, cette opération ne présente donc pas de retenue. Toujours au rang des dizaines,  $\Delta - \square = 3$  donc  $\Delta$  est plus grand que  $\square$ .

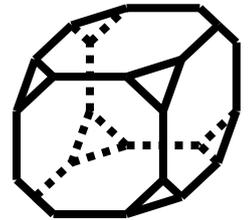
On peut tester les différentes possibilités :

Valeur de $\square$	Au rang des unités, $\square + \Delta = 7$ donc valeur de $\Delta$	Résultat de $\Delta 7 - \square \Delta$	Valeur de $3 \square$	Égalité ?
0	7	$77 - 7 = 70$	30	Non
1	6	$67 - 16 = 51$	31	Non
2	5	$57 - 25 = 32$	32	Oui
3	4	$47 - 34 = 13$	33	Non

*Prolongement* : voir le problème 4 de la manche 2 au rallye 2018.

- *Énigme 2* : on a tronqué un cube comme ci-dessous auquel on a enlevé une petite pyramide à chaque sommet.

Combien ce cube tronqué a-t-il d'arêtes ?



**Réponse : le nombre d'arêtes de ce cube tronqué est 36.**

*Solution* : On peut dénombrer les arêtes en considérant par exemple le plan sur lequel repose le cube (16 arêtes, 4 triangles équilatéraux et 4 qui les relient) puis le plan « du dessus », 16 aussi et enfin les arêtes verticales 4 soit en tout 36 arêtes. On peut aussi raisonner sur le nombre d'arêtes du cube initial (12) et considérer que l'on ajoute 3 nouvelles arêtes par sommet soit 24 nouvelles arêtes ce qui conduit à 36 arêtes en tout.

*Prolongement* : combien ce cube tronqué a-t-il de sommets ?

# Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées



Cycle 3 : troisième manche (réponses)

du jeudi 14 mars 2024



- **Énigme 3** : pour le récompenser d'avoir créé le jeu d'échec, le roi Belkib offre à Sissa les grains de riz placés sur un échiquier de la façon suivante : un grain sur la première case, deux grains sur la deuxième et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre de grains de riz que l'on met sur chacune des cases.

Sur quelle case place-t-on le millionième grain ?

**Réponse : le millionième grain sera sur la case 20.**

**Solution** : on peut dresser un tableau dans lequel figurent le numéro de la case, le nombre de grains versés sur la case correspondante et le nombre cumulés de grains rendu à cette case. Comme pour le problème 4, le tableur peut automatiser la tâche à réaliser. Le millionième grain est déposé sur la case 20.

**Remarque** : le nombre de grains de blé évolue lentement au début mais plus on avance dans les cases de l'échiquier, plus la quantité augmente rapidement. On parle de croissance exponentielle.

	A	B	C	D
1				
2		Case	Nb de grains sur la case	Nb de grains déposés sur l'échiquier
3		1	1	1
4		2	2	3
5		3	4	7
6		4	8	15
7		5	16	31
8		6	32	63
9		7	64	127
10		8	128	255
11		9	256	511
12		10	512	1023
13		11	1024	2047
14		12	2048	4095
15		13	4096	8191
16		14	8192	16383
17		15	16384	32767
18		16	32768	65535
19		17	65536	131071
20		18	131072	262143
21		19	262144	524287
22		20	524288	1048575
23				

**Prolongements** : j'ai gagné à un jeu, on me propose deux choix. Je peux recevoir soit 1000€ par jour pendant 20 jours soit 1€ le premier jour, 2€ le deuxième jour et ainsi de suite en doublant chaque fois la somme gagnée la veille, ceci pendant 20 jours. Quel est le choix le plus avantageux à faire ?

Le code à trouver a :

- comme nombre de milliers, le résultat de la soustraction ;
- comme chiffres des dizaines, le chiffre des dizaines du nombre d'arêtes du cube tronqué ;
- comme chiffre des centaines, le chiffre des dizaines du numéro de la case sur l'échiquier ;
- comme chiffre des unités, le chiffre des unités du nombre d'arêtes du cube tronqué.

Quel est ce code ?

**Réponse : Le code à trouver est donc 32236.**