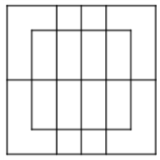
Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées

Cycle 2 : troisième manche (réponses)

du jeudi 13 mars 2025

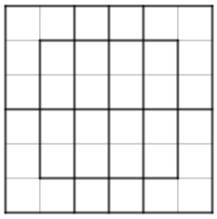
1) Carrément carrés .... 2 ✸

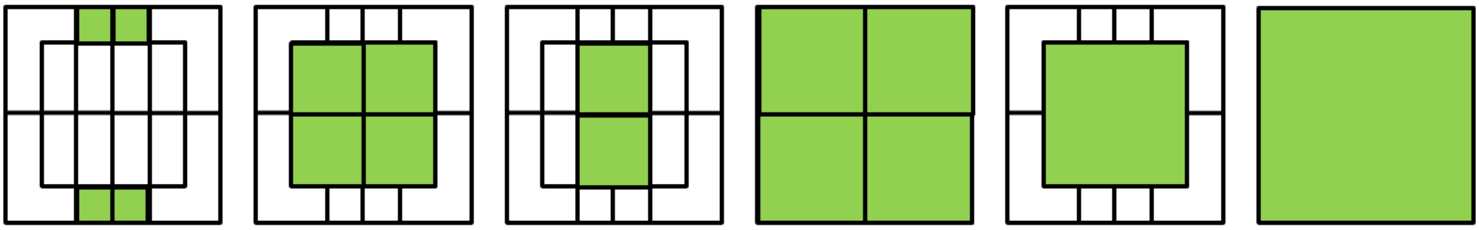
Combien de carrés sont dessinés dans la figure ci-dessous ?



Réponse : Il y a en tout **16 carrés** dessinés dans cette figure.

Solution : Si on prend la longueur du plus petit carré du quadrillage de la figure ci-contre comme étalon de longueur, on peut identifier 4 carrés de côté 1, 6 carrés de côté 2, 4 carrés de côté 3, 1 carré de côté 4 et 1 carré de côté 6 soit un total de 4 + 6 + 4 + 1 + 1 = 16 carrés.





Remarques : Il s'agit ici de repérer des figures comme sous-figures de figures élémentaires. Décomposer et recomposer des figures simples en figures complexes constituent des tâches (dans l'espace sensible et symbolique) importantes à l'école ; elles contribuent à augmenter la flexibilité des appréhensions d'une même figure qui aidera dans la résolution de problèmes en géométrie.

Prolongements :

cf. rallye 2023 - manche 1 - problème 1 ou rallye 2022 - manche 2 - problème 3 ou rallye 2024 - manche 2 - problème 2

2) Changer de place.. 4 ✸

Dans une classe de 12 élèves, le professeur change les places chaque semaine, selon la règle suivante. L'élève en place numéro 1 va à la place numéro 10, ce que nous notons 1 → 10 ; de même, 2 → 3 ; 3 → 9 ; 4 → 12 ; 5 → 4 ; 6 → 11 ; 7 → 5 ; 8 → 1 ; 9 → 2 ; 10 → 8 ; 11 → 7 ; 12 → 6.
Après combien de semaines pour la première fois tous les élèves occuperont-ils à nouveau les mêmes places que la première semaine ?

Réponse : **Après 6 semaines**, pour la première fois, tous les élèves occuperont les mêmes places que la première semaine.

Solution :

Si l'on suit l'évolution de chacune des places de chaque élève semaine après semaine dans un tableau on peut déterminer le nombre de semaines minimal pour que chaque un élève retrouve sa place initiale.

Élèves	*N° places Semaine de départ*	*N° places Après 1 semaine*	*N° places Après 2 semaines*	*N° places Après 3 semaines*	*N° places Après 4 semaines*	*N° places Après 5 semaines*	*N° places Après 6 semaines*
Élève A	*1*	*10*	*8*	*1*	*10*	*8*	*1*
Élève B	*2*	*3*	*9*	*2*	*3*	*9*	*2*
Élève C	*3*	*9*	*2*	*3*	*9*	*2*	*3*
Élève D	*4*	*12*	*6*	*11*	*7*	*5*	*4*
Élève E	*5*	*4*	*12*	*6*	*11*	*7*	*5*

Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées

IRES TOULOUSE

Cycle 2 : troisième manche (réponses)

du jeudi 13 mars 2025

INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Toulouse Occitanie-Pyrénées

Élève F	*6*	*11*	*7*	*5*	*4*	*12*	*6*
Élève G	*7*	*5*	*4*	*12*	*6*	*11*	*7*
Élève H	*8*	*1*	*10*	*8*	*1*	*10*	*8*
Élève I	*9*	*2*	*3*	*9*	*2*	*3*	*9*
Élève J	*10*	*8*	*1*	*10*	*8*	*1*	*10*
Élève K	*11*	*7*	*5*	*4*	*12*	*6*	*11*
Élève L	*12*	*6*	*11*	*7*	*5*	*4*	*12*

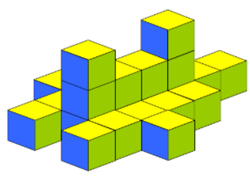
Remarques : On peut remarquer que si le numéro de la place d'un élève appartient à {1, 8, 10} ou à {2, 3, 9} alors l'élève retrouve sa place initiale après 3 semaines et que si le numéro de place de l'élève appartient à {4, 5, 6, 7, 11, 12} alors l'élève retrouve sa place initiale après 6 semaines. Cela vient de la présence de deux cycles de longueur 3 et d'un cycle de longueur 6 :

$$1 \to 10 \to 8 \to 1\ ;\ 2 \to 3 \to 9 \to 2 \text{ et } 4 \to 12 \to 6 \to 11 \to 7 \to 5 \to 4$$

Ainsi le nombre de semaines après lequel tous les élèves retrouvent pour la première fois leur place initiale est le Plus Petit Commun Multiple de 3 et 6, c'est-à-dire 6.

Prolongements : Varier davantage la longueur des cycles, par exemple toujours pour 12 élèves prendre un cycle de longueur 2, un cycle de longueur 3 et un cycle de longueur 7 : $1 \to 10 \to 1\ ;\ 2 \to 11 \to 8 \to 2\ ;\ 3 \to 5 \to 7 \to 12 \to 9 \to 4 \to 6 \to 3$

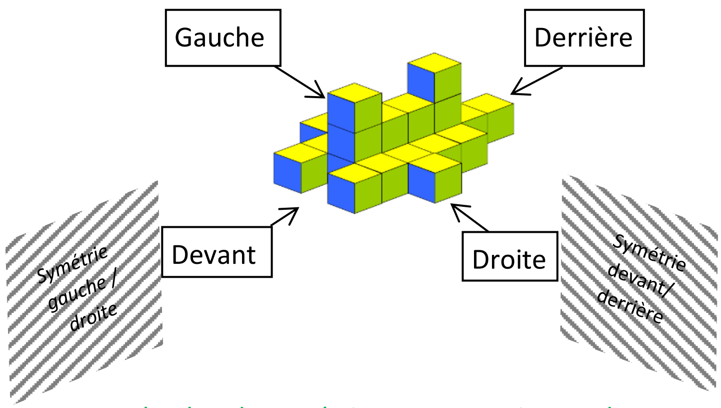
3) Le crocodile.. 6 ✸



Lucas a empilé des cubes pour réaliser cet assemblage.
Sachant qu'il est symétrique, combien a-t-il utilisé de cubes ?

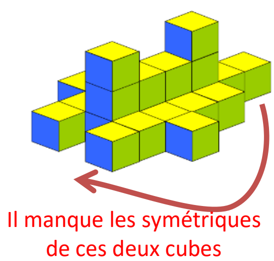
Réponse : pour réaliser cet assemblage, on a empilé **24 cubes**.

Solutions : Pour plus de lisibilité, on convient de l'orientation suivante



Il faut commencer par trouver le plan de symétrie pour pouvoir prendre en compte les cubes cachés dans la représentation donnée. L'assemblage étant constitués de cubes, on s'oriente naturellement sur les symétries par rapport à des plans orthogonaux aux trois directions principales de l'espace : droite/gauche (comme sur la symétrie corporelle naturelle), devant/derrière et haut/bas.

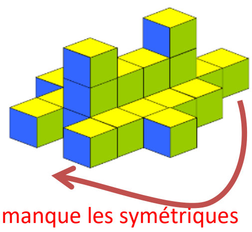
Les nombres de cubes sur les différents étages nous fait éliminer perceptivement toute symétrie haut/bas par rapport à un plan horizontal.
Les deux cubes à l'arrière de l'assemblage ne se retrouvent pas à l'avant, ce qui élimine la symétrie par rapport à un plan devant/derrière (cf. figure ci-contre).
Cet assemblage est donc nécessairement symétrique selon un plan orthogonal à la direction droite/gauche.



Afin de respecter cette symétrie, le nombre de cubes, dénombrés de la droite vers la gauche, est donc nécessairement 1+5+12+5+1 soit 24 cubes au total.

Il faut commencer par trouver l'axe de symétrie pour pouvoir prendre en compte les cubes cachés dans la représentation donnée.

Aucune rangée de cubes du type devant – derrière ne peut être axe de symétrie de la figure (car le nombre de rangées de gauche à droite est 7 donc s'il y avait une rangée du type devant – derrière axe de symétrie ce serait celle du milieu en allant de gauche à droite, c'est-à-dire la quatrième qui n'est manifestement pas axe de symétrie de la figure),



Donc l'axe de symétrie de la figure est un axe du type gauche – droite et comme le nombre de rangées de cubes du type gauche – droite est 5, cet axe de symétrie est donc nécessairement la troisième rangée de cubes du type gauche – droite que l'on parte de la gauche ou de la droite. Cette rangée de cubes qui est axe de symétrie de la figure comporte (en allant de devant à derrière) 6 piles de cubes constituées respectivement de 3 cubes 2 cubes, 2 cubes, 3 cubes, 1 cube, et 1 cube soit un total de 12 cubes. Ensuite, nous allons compter le nombre de cubes situés à droite cet axe de symétrie : en allant de la droite vers la gauche il y a d'abord une rangée de 1 cube puis une rangée de 5 cubes soit un total de 6 cubes. Par symétrie on peut en déduire qu'il y a aussi 6 cubes à gauche de l'axe de symétrie. Donc au total l'assemblage de cubes représenté comporte 12 + 6 + 6 = 24 cubes.

Remarque : le mot « symétrique » est pris ici dans son acception commune.

Prolongement : cf. rallye 2018 - manche 3 - problème 2

4) Les colliers

.... **8** ✸

Un joaillier décide de faire des colliers différents avec deux types de pierres semi-précieuses, des Améthystes triangulaires (toutes identiques) et des Aigues-marines en forme d'étoile (toutes identiques aussi). Il monte ces pierres sur des chaines identiques qui coûtent 8 €. Le joaillier détermine les prix de ces colliers en fonction de leur composition. Quel est le prix du dernier collier ?

Réponse : Le prix du dernier collier est **86 €**.

Solutions :

Méthode 1 : par comparaison des premier et troisième colliers, on en déduit qu'une Aigue-marine coûte (98 € – 74 €) : 2 = 12 €. En considérant le deuxième collier, on en déduit qu'une Améthyste coûte (52 € – 24 € – 8 €) : 4 = 5 €. Le collier dont on cherche le prix contient une chaîne, quatre Aigues-marines et six Améthystes. Ce prix est donc 8 € + 4 ×12 € + 6 × 5 € = 8 € + 48 € + 30 € = 86 €.

Méthode 2 : par comparaison du premier et du troisième collier, on en déduit qu'une Aigue-marine coûte (98 € – 74 €) : 2 = 12 €. Le collier dont on cherche le prix contient une Aigue-marine de moins que le troisième collier. Ce prix est donc 98 € – 12 € = 86 €.

Méthode 3 : par comparaison du premier et du troisième collier, on en déduit qu'une paire d'Aigues-marines coûtent 98 € – 74 € = 24 €. En considérant le deuxième collier, on en déduit que quatre Améthystes coûtent 52 € – 24 € – 8 € = 20 €, donc une paire d'Améthystes coûte 10 €. Le collier dont on cherche le prix contient une chaîne, deux paires d'Aigues-marines et trois paires d'Améthystes. Ce prix est donc 8 € + 2 ×24 € + 3 × 10 € = 8 € + 48 € + 30 € = 86 €.

Méthode 4 : avec les premier et le troisième colliers, le joaillier pourrait fabriquer deux colliers du type de celui dont on cherche le prix. Ce prix est donc (74 € + 98 €) : 2 = 86 €.

Remarques :

La méthode 2 montre qu'il n'est pas nécessaire de connaître le prix d'une Améthyste pour trouver le prix cherché.

La méthode 3 montre qu'il n'est pas nécessaire de connaître le prix d'une Améthyste et celui d'une Aigue-marine pour trouver le prix cherché. Un raisonnement sur les paires fonctionne ici.

La méthode 4 montre qu'il n'est pas nécessaire de connaître le prix d'une Améthyste et celui d'une Aigue-marine pour trouver le prix cherché.

Prolongements :

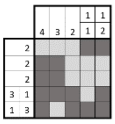
Ce type d'exercices peut être reproduit simplement. Un choix des compositions permettant des comparaisons variées est source de pluralité des méthodes.

Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées

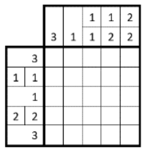
Cycle 2 : troisième manche (réponses)

du jeudi 13 mars 2025

5) Nonograms ....10 ✸

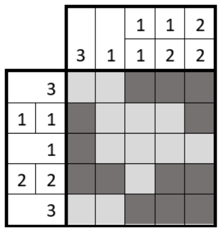


Dans cette grille, les nombres en tête de chaque ligne et chaque colonne indiquent le nombre de cases qu'il faut noircir. Il doit y avoir au moins une case grise entre deux séries de cases noircies.
Pour indiquer la composition de la quatrième ligne, on utiliserait le codage NNNGN (N et G indique la couleur de la case).
Complétez cette grille vierge et indiquez le codage de la deuxième ligne.



Réponse : le codage de la deuxième ligne est **NGGGN**.

Solution :



La grille complétée est présentée ci-contre. Il n'est pas efficace de tester toutes les possibilités de compléter les cases noires, il faut tenir compte de certaines positions de cases nécessairement noires. La grille à compléter comporte 5 cases par ligne et par colonne. Si on doit aligner par exemple 3 cases noires sur une ligne ou une colonne, la case centrale est nécessairement noire. Si nous numérotons chaque case de la première à la cinquième, les cases noires pourraient se trouver sur les cases 1/2/3 ou 2/3/4 ou 3/4/5. On remarque que la case 3 est toujours noire. De la même façon, si on doit aligner 4 cases noires, les deuxième, troisième et quatrième cases sont noires (on pourrait avoir NNNNG ou GNNNN, soit 3 cases nécessairement noires). Ce raisonnement peut être prolongé dans le cas où une ligne ou une colonne présente deux séries de deux cases noires, soit en tout cinq cases (deux noires, une grise, deux noires), la configuration est donc NNGNN.

Dans la grille à compléter, les première et dernière lignes comportent 3 cases noires, la troisième colonne de cette grille est donc NGGGN. La dernière colonne et la troisième ligne comportent deux séries de 2 cases noires, leur codage est donc NNGNN. De fait, on code les première et cinquième lignes GGNNN. Pour la première colonne, la quatrième case est noire et la cinquième est grise, le codage est donc GNNNG. La deuxième colonne est déjà complétée puisqu'elle ne contient qu'une seule case noire, déjà repérée par les cases noires de la quatrième ligne.

Remarque : une organisation logique suffit à compléter ces grilles, il faut également de la patience pour croiser toutes les informations présentes avant de noircir une case. L'ordre pour interpréter les informations n'est pas forcément de gauche à droite et de bas en haut.

Prolongement : de nombreux sites internet présentent ces jeux de grilles, appelés aussi picross. On peut citer l'adresse https://www.puzzle-nonograms.com/ avec d'autres jeux logiques de grilles.

6) Le bon code ....12 ✸

Énigme 1 : le livre gribouillé

Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à 100. Pierre qui n'aime pas les chiffres 4 et 7 a gribouillé toutes les pages sur lesquelles le numéro de page contient au moins un des deux chiffres 4 ou 7. Le chiffre des unités du code est le même que celui du nombre de pages gribouillées par Pierre dans le livre ?

Réponse : Pierre a gribouillé **36 pages** dans le livre.

Solutions :

Les dix nombres de la dizaine « quarante et quelques » contiennent au moins le chiffre 4. De même, les dix nombres de la dizaine « soixante-dix et quelques » contiennent au moins le chiffre 7. Dans chacune des huit autres dizaines, il y a exactement un nombre contenant le chiffre 4 et un nombre contenant le chiffre 7. 10 + 10 + 8 × 2 = 36 donc Pierre a gribouillé 36 pages.

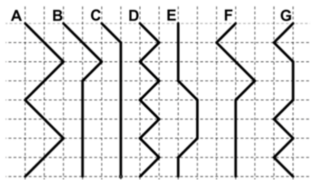
Remarque : Les plus jeunes élèves, pouvaient s'appuyer sur une bande numérique ou un tableau de nombres présents dans la classe ou reconstitués par eux-mêmes, marquer symboliquement les numéros des pages gribouillées puis procéder au dénombrement des pages restantes. Ce problème peut également être l'occasion de leur rappeler que les nombres s'écrivent usuellement avec un ou plusieurs chiffres.

Prolongement : Même question pour un livre de 100 pages dans le cas où Pierre n'aime pas les chiffres 0 et 1.

Même question pour un livre de 1 000 pages. Même question pour un livre de 358 pages.

Énigme 2 : les chemins

Antoine, Boris, Camille, David, Émilie, Farida et Gaël ont chacun choisi un chemin pour traverser le quadrillage. Antoine a pris le chemin A, Boris a pris le chemin B, etc. Rangez ces chemins du plus court au plus long. *Qui a choisi le cinquième chemin rangé ainsi par ordre croissant de longueurs ? Le rang alphabétique de l'initiale de son prénom est le nombre de dizaines du code.*



Réponse : le rangement des 7 chemins, du plus court au plus long est : C < E < B < F < G < D = A. Le cinquième chemin rangé ainsi par ordre croissant de longueurs est choisi par Gaël ; son initiale G est la **septième** lettre de l'alphabet.

Solution : On peut par exemple coder d la longueur d'une diagonale d'un carreau du quadrillage et c la longueur d'un côté d'un de ces carreaux.

La longueur de chaque chemin peut alors se coder avec des c et des d : par exemple, la longueur du chemin A se code 8d, celle du chemin E se code 2d + 6c.

Pour chaque chemin, le nombre de d ajouté au nombre de c est égal à 8, et comme d est plus grand que c, plus il y a de d dans le codage de la longueur d'un chemin, et plus ce chemin est long !

Remarques : les longueurs ne sont pas nécessairement associées à des lignes droites ; les lignes peuvent être brisées, ne pas suivre les lignes d'un quadrillage ou d'un réseau de points, être courbes, mixtes (rectilignes et arrondies par morceaux), ouvertes ou fermées…

Les positions des extrémités des lignes ouvertes ne sont pas (ne doivent pas être) un indicateur de leur longueur. La distance entre leurs extrémités n'est pas (ne doit pas être) un indicateur de leur longueur. La formulation de la réponse convoque le nombre dans sa fonction ordinale.

Rappelons les divers contextes du nombre :

- *des quantités peuvent être exprimées par des nombres (dans leur fonction cardinale) ;*
- *des rangs ou positions dans une liste peuvent être exprimés par des nombres (dans leur fonction ordinale) ;*
- *des grandeurs peuvent être mesurées par des nombres dans une unité donnée (mesures) ;*
- *des désignations peuvent être faites par des nombres (numéros).*

Prolongements : dessinez un chemin plus long que F mais plus court que G. Etc.

Quel est ce code ?

L'initiale du prénom Gaëlle est la septième lettre de l'alphabet et le chiffre des unités de 36 est 6.

Réponse : le bon code est **76**.

Remarque : Les exercices du type le bon code peuvent inciter à davantage de coopération entre élèves et groupes au sein de la classe.

N'hésitez pas à nous faire part, de vos témoignages sur l'organisation du rallye dans votre classe, sur certaines réactions d'élèves, sur vos motivations d'enseignant à proposer le rallye mathématique à votre classe… Pour cela vous pouvez le faire directement sur :

https://enquetes.univ-tlse2.fr/index.php/576985?lang=fr