

Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées



Cycle 3 : première manche (réponses)
du mardi 19 novembre 2024



1) La clôture..... 2 *

Un champ a la forme d'un carré de quatre-vingts mètres de côté. À quatre mètres des bords de ce champ (à l'intérieur), on plante des arbres sur le pourtour d'un nouveau carré. Sur ce nouveau carré intérieur, il y a un arbre à chaque sommet et les arbres consécutifs sont distants de six mètres. Quel est le nombre d'arbres plantés tout autour du carré ?

Réponse : il y a **48 arbres** plantés autour du carré.

Solution : Les arbres sont plantés sur le pourtour d'un carré de côté 72 m ($80\text{ m} - 4\text{ m} - 4\text{ m}$). Les arbres sont plantés tous les 6 m sur le pourtour du carré de longueur 288 m ($4 \times 72\text{ m}$), donc il y a $288 : 6 (= 48)$ intervalles et comme le pourtour du carré est une ligne fermée, il y a donc 48 arbres sur le pourtour du carré intérieur.

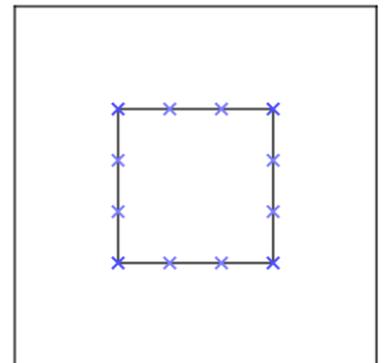
Autre méthode : il y a 13 arbres sur chaque côté du carré, soit $4 \times 13 - 4 (= 48)$ arbres car dans le calcul 4×13 , on a compté deux fois les arbres situés à chaque sommet du carré.

Autre méthode : $13 + 13 + 11 + 11 = 48$ ou $13 + 12 + 12 + 11 = 48$ arbres.

Remarques : sur une ligne fermée, il y a autant de piquets que d'intervalles ; sur une ligne ouverte avec des piquets aux extrémités, il y a un piquet de plus que d'intervalles. Quand on divise des longueurs entre elles, le nombre obtenu renvoie à un nombre de longueurs, donc à un nombre d'intervalles.

Remarque : On peut s'aider d'une représentation de la situation afin d'établir une relation entre le nombre de piquets et d'intervalles. Sur cette représentation, on peut pour cela recourir à un cas simplifié (en choisissant nous-même les nombres en jeu) sur lequel on peut dénombrer en comptant.

Prolongement : Même configuration de départ mais les arbres sont plantés sur le pourtour et à l'intérieur du carré sur les nœuds d'un réseau à maille carrée de côtés de longueur 6 m. Combien d'arbres sont plantés ?



2) Le plus grand contour..... 4 *

On assemble deux des quatre triangles suivants de dimensions A(3 ; 4 ; 5), B(3 ; 4 ; 6), C(3 ; 5 ; 6), D(4 ; 8 ; 8) par deux côtés de même longueur pour obtenir un quadrilatère et on calcule son périmètre.

Quel est le plus grand périmètre que l'on peut obtenir ?

Réponse : **Le plus grand périmètre est 22** ; on l'obtient en assemblant les triangles B et D sur leurs côtés de longueur 4.

Solution : On peut procéder par exhaustion des cas en testant tous les assemblages en mode éactif (sensorimoteur) ou comme ci-dessous :

| Assemblage | périmètre |
|--|--|
| Triangles A et B assemblés par leurs côtés de longueur 3 | $P = 4 + 5 + 4 + 6 = 19$ ou $P = (3 + 4 + 5) + (3 + 4 + 6) - 23 = 19$ |
| Triangles A et B assemblés par leurs côtés de longueur 4 | $P = 3 + 5 + 3 + 6 = 17$ |
| Triangles A et C assemblés par leurs côtés de longueur 3 | $P = 4 + 5 + 5 + 6 = 21$ |
| Triangles A et C assemblés par leurs côtés de longueur 5 | $P = 3 + 4 + 3 + 6 = 16$ |
| Triangles A et D assemblés par leurs côtés de longueur 4 | $P = 3 + 5 + 5 + 8 = 21$ |
| Triangles A et D assemblés par leurs côtés de longueur 5 | $P = 3 + 4 + 4 + 8 = 19$ |

Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées



Cycle 3 : première manche (réponses)

du mardi 19 novembre 2024



| | |
|---|--|
| Triangles B et C assemblés par leurs côtés de longueur 3 | $P = 4 + 6 + 5 + 6 = 21$ |
| Triangles B et C assemblés par leurs côtés de longueur 6 | $P = 3 + 4 + 3 + 5 = 15$ |
| Triangles B et D assemblés par leurs côtés de longueur 4 | $P = 3 + 6 + 5 + 8 = 22$ |
| Triangles C et D assemblés par leurs côtés de longueur 5 | $P = 3 + 6 + 4 + 8 = 21$ |

Le quadrilatère de plus grand périmètre est obtenu en assemblant les triangles B et D sur leurs côtés de longueur 4. Son périmètre est alors égal à 22 (l'unité étant la même que celle des longueurs des côtés des triangles).

(N.B. une erreur a été commise dans les triangles dessinés ; avec ces derniers, le plus grand périmètre est 25 obtenu aussi en assemblant les triangles B et D sur leurs côtés de longueur 4.)

Remarque : on pourra faire remarquer que le périmètre d'un assemblage n'est pas la somme des périmètres des parties alors que l'aire d'un assemblage est la somme des aires des parties (pour les périmètres il faut soustraire 2 fois les longueurs des bords assemblés).

Prolongements : on considère tous les triangles dont les côtés ont des longueurs entières inférieures ou égales à 9 cm. Quels triangles faut-il assembler pour obtenir un quadrilatère ayant le plus grand périmètre possible ? Quels triangles faut-il assembler pour obtenir un quadrilatère ayant le plus petit périmètre possible ?

3) 2024 6 *

La somme des chiffres utilisés pour écrire 2024 est 8. Combien y a-t-il de nombres entiers inférieurs à 1000 qui ont aussi pour somme des chiffres 8 ?

Réponse : **45** ($6 \times 5 + 3 \times 5$)

Solution : on peut coopérer en se répartissant les domaines numériques :

Nombres à un chiffre : 8 → 1 nombre

Nombres à deux chiffres : 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80 → 8 nombres

Nombres à 3 chiffres avec 1 comme chiffre des centaines : 107, 116, 125, 134, 143, 152, 161, 170 → 8 nombres.

Nombres à 3 chiffres avec 2 comme chiffre des centaines : 206, 215, 224, 233, 242, 251, 260 → 7 nombres.

Nombres à 3 chiffres avec 3 comme chiffre des centaines : 305, 314, 323, 332, 341, 350 → 6 nombres.

Nombres à 3 chiffres avec 4 comme chiffre des centaines : 404, 413, 422, 431, 440 → 5 nombres.

Nombres à 3 chiffres avec 5 comme chiffre des centaines : 503, 512, 521, 530 → 4 nombres.

Nombres à 3 chiffres avec 6 comme chiffre des centaines : 602, 611, 620 → 3 nombres.

Nombres à 3 chiffres avec 7 comme chiffre des centaines : 701, 710 → 2 nombres.

Nombres à 3 chiffres avec 8 comme chiffre des centaines : 800 → 1 nombre.

Nombres à 3 chiffres avec 9 comme chiffre des centaines : → pas de nombre.

Soit au total 45 ($1 + 8 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$) nombres inférieurs à 100 ayant 8 comme somme des chiffres.

Autre méthode :

On décompose 8 en somme de :

➤ 3 nombres à un chiffre distincts : (0 ; 1 ; 7) ; (0 ; 2 ; 6) ; (0 ; 3 ; 5) ; (1 ; 2 ; 5) ; (1 ; 3 ; 4)

- Dans chacun des cas, on peut construire 6 nombres (par exemple : 017 (qu'on écrira 17) ; 071 (qu'on écrira 71) ; 107 ; 171 ; 701 et 710)

Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées



Cycle 3 : première manche (réponses)

du mardi 19 novembre 2024



- 3 nombres à un chiffre dont 2 identiques : (0 ; 0 ; 8) ; (1 ; 1 ; 6) ; (2 ; 2 ; 4) ; (3 ; 3 ; 2) ; (4 ; 4 ; 0)
 - Dans chacun des cas, on peut construire 3 nombres (par exemple : 008 (qu'on écrira 8) ; 080 (qu'on écrira 80) ; 800)

En tout, on trouve donc $(6 \times 5 + 3 \times 5)$ soit 45 nombres.

Temporairement, pour la recherche, on s'est autorisé à écrire des nombres de façon non usuelle : cela nous a permis d'adopter un même modèle pour notre recherche sans distinguer les cas où le chiffre 0 se trouvait au début du nombre.

Remarque : on pourra attirer l'attention des élèves sur l'importance de l'organisation de leur recherche pour pouvoir valider leur solution.

Prolongements : même consigne pour les nombres entiers inférieurs aux égaux à 2024 ayant 8 pour somme des chiffres. Même consigne pour les nombres entiers inférieurs aux égaux à 2025 ayant 9 pour somme des chiffres.

4) Un bon placement 8 ★

On a placé quatre pions dans la grille.

À titre d'exemple, la disposition ci-contre se code **2314** (dans la 1^{ère} colonne, le pion est sur la 2^e ligne, dans la 2^e colonne, il est sur la 3^e ligne, dans la 3^e colonne, il est sur la 1^{ère} ligne, dans la 4^e colonne, il est sur la 4^e ligne).

Changer la disposition des pions de manière à ce qu'il y ait au maximum un pion sur chaque ligne, chaque colonne, chaque diagonale et chaque parallèle aux diagonales.

Proposer une nouvelle disposition qui convient et donner son code.

Réponse : Deux dispositions conviennent : **3142** ou **2413**.

Solution : On peut procéder par tâtonnements ou par exhaustion des cas comme :

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | ● | |
| ● | | | |
| | ● | | |
| | | | ● |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | ● | | |
| | | | ● |
| ● | | | |
| | | ● | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | ● | |
| ● | | | |
| | | | ● |
| | ● | | |

The diagram shows a sequence of 12 4x4 grids illustrating the search for a valid placement of four pions. Each grid has a blue dot in a different position and red 'x' marks in other positions. Some grids are crossed out with a red 'x', while others are marked with a blue checkmark. The final two grids are labeled '3142' and '2413'.

Prolongement : idem pour une grille 5x5.

Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées



Cycle 3 : première manche (réponses)
du mardi 19 novembre 2024



5) Une opération attachante 10 *

L'opération "Cœur" produit les résultats suivants :

$$17 \heartsuit 82 = 80$$

$$9 \heartsuit 14 = 45$$

$$19 \heartsuit 28 = 100$$

$$30 \heartsuit 30 = 9$$

Donner un nombre ... s'écrivant avec trois chiffres tel que : $2024 \heartsuit \dots = 56$.

Réponse : Plusieurs solutions possibles : (700 ; 601 ; 610 ; 502 ; 511 ; 520 ; 403 ; 412 ; 421 ; 430 ; 304 ; 314 ; 322 ; 331 ; 340 ; 205 ; 214 ; 223 ; 232 ; 241 ; 250 ; 106 ; 115 ; 124 ; 133 ; 142 ; 151 ; 160)

Solution : le résultat de l'opération \heartsuit est le produit des nombres obtenus en additionnant les chiffres des opérands ainsi :

$$17 \heartsuit 82 = 80 \leftarrow (1+7) \times (8+2)$$

$$9 \heartsuit 14 = 45 \leftarrow (9) \times (1+4)$$

$$19 \heartsuit 28 = 100 \leftarrow (1+9) \times (2+8)$$

$$30 \heartsuit 30 = 9 \leftarrow (3+0) \times (3+0)$$

La conjoncture peut émerger à partir de $3 \times 3 = 9$ et $9 \times 5 = 45$ et se valider via les deux autres exemples.

Puis $2 + 0 + 2 + 4 = 8$ et $8 \times 7 = 56$, donc tout nombre à trois chiffres dont la somme des chiffres est 7 convient.

Remarque : Ce problème atypique mobilise tout d'abord un raisonnement inductif afin d'induire l'algorithme d'une opération originale à partir de quelques exemples.

Prolongement : « l'opération pensée » : par groupes, inventer une nouvelle opération et la faire deviner aux autres groupes à partir de quelques exemples.

6) Le bon code 12 *

Énigme 1 : En utilisant une fois et une seule chacun des quatre mots « deux », « quatre », « vingt », « cent » et seulement ces quatre mots, on peut écrire des nombres différents (On peut utiliser le trait d'union et des « s »). Le nombre de centaines de leur somme est le même que celui du code à trouver.

Réponse : La somme des nombres possibles est **1108**

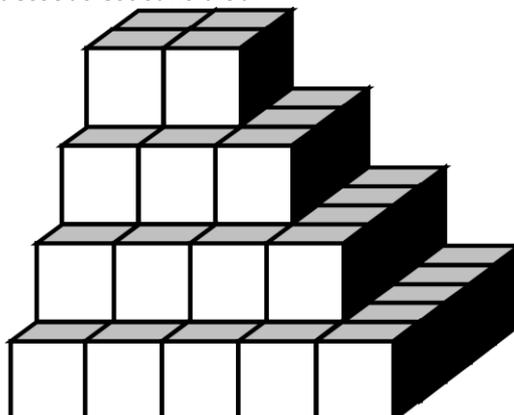
Solution : En testant toutes les combinaisons (16), on obtient les 4 qui ont un sens : Deux cent quatre-vingts, deux cent vingt-quatre, quatre cent vingt-deux, cent quatre-vingt-deux.

$$\text{Ainsi } 280 + 224 + 422 + 182 = 1108$$

Remarque : On peut aussi remarquer directement que vingt ne peut précéder cent...

Prolongement : Pour travailler de façon ludique sur les différences entre numérations écrite et orale, on pourra utiliser les activités sur les "mots-nombres" présentées dans Ermel CE2 et CM1.

Énigme 2 : L'empilement de cubes ci-dessous est sans trou.



Sans déplacer les cubes déjà en place, quel nombre minimum de cubes faut-il lui ajouter pour obtenir un grand cube (sans trou à l'intérieur) ? Ce nombre a le même chiffre des unités que le code à trouver.

Réponse : il faut ajouter **71 cubes** pour obtenir un grand cube.

Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées



Cycle 3 : première manche (réponses)

du mardi 19 novembre 2024



Solution : une stratégie peut consister à compléter chaque niveau sans oublier le 5^e afin de constituer un cube ($0 + 9 + 16 + 21 + 25$) soit 71 cubes. On pouvait également dénombrer le nombre de cubes de la pyramide ($4 + 9 + 16 + 25$) soit 54 cubes puis le nombre de petits cubes dans le grand cube ($5 \times 5 \times 5$) soit 125 cubes et par différence trouver 71 cubes.

Remarque : le nombre de cubes d'une pyramide à n étages (constitués de cubes assemblés en carrés) est donné par la formule $(2n+1)(n+1)n/6$

Prolongement : même question en enlevant la contrainte « sans déplacer les cubes déjà en place ».

Énigme 3 : Trois chameliers conduisent chacun trois chameaux. Sur chaque chameau, il y a trois paniers. Dans chaque panier, il y a trois chattes. Et chacune des chattes est accompagnée de trois chatons. Cela fait beaucoup de pattes ou de jambes. Combien en comptez-vous, en tout, dans cette caravane ?

Ce nombre a le même chiffre des dizaines que le code à trouver.

Réponse : Il y a **1338 pattes ou jambes** dans cette caravane.

Solution : Il y a : $3 \times 3 (= 9)$ chameaux, $9 \times 3 (= 27)$ paniers, $27 \times 3 (= 81)$ chattes et $81 \times 3 (= 243)$ chatons. La caravane est constituée de $9 + 81 + 243 = 333$ animaux à 4 pattes et des 6 jambes des chameliers d'où $333 \times 4 + 3 \times 2 = 1338$ pattes ou jambes

Remarque : la structure répétitive dans l'énigme (multiplications successives par trois) peut troubler. Il ne faut pas se laisser distraire et, avant de calculer le nombre de pattes ou de jambes, il faut résoudre un sous-problème (qui n'est pas posé dans l'énoncé) : combien y a-t-il d'êtres vivants (chameliers, chameaux, chattes et chatons) dans cette caravane ?

Prolongement : Quatre bergers conduisent chacun quatre moutons. Sur chaque mouton, il y a quatre paniers. Dans chaque panier, il y a quatre oiseaux. Et chaque oiseau tient dans son bec un insecte. Cela fait beaucoup de pattes ou de jambes. Combien en comptez-vous, en tout ?

Quel est ce code ?

Réponse : le code à trouver est **1131**

Solution : D'après les réponses aux énigmes précédentes : 1108, 71 et 1138, on peut dire que

- le code a 11 centaines,
- le chiffre des unités du code est 1
- le chiffre des dizaines du code est 3

d'où le code 1131

Remarque : Les exercices du type le bon code peuvent inciter à davantage de coopération entre élèves et groupes au sein de la classe.



N'hésitez pas à nous faire part, de vos témoignages sur l'organisation du rallye dans votre classe, sur certaines réactions d'élèves, sur vos motivations d'enseignant à proposer le rallye mathématique à votre classe... Pour cela vous pouvez le faire directement sur :

<https://enquetes.univ-tlse2.fr/index.php/576985?lang=fr>