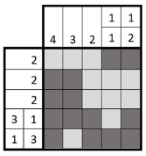
Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées

Cycle 3 : troisième manche (réponses)

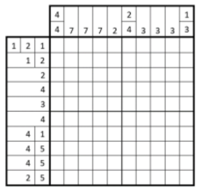
du jeudi 13 mars 2025

1) Nonograms .... 2 ✸

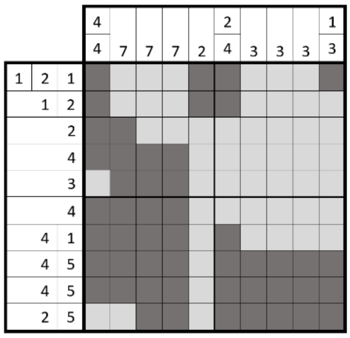


Dans cette grille, les nombres en tête de chaque ligne et chaque colonne indiquent le nombre de cases qu'il faut noircir. Il doit y avoir au moins une case grise entre deux séries de cases noircies.
Pour indiquer la composition de la quatrième ligne, on utiliserait le codage NNNGN.
(N et G indique la couleur de la case).

Complétez cette grille vierge et indiquez le codage de la deuxième ligne.



Réponse : le codage de la deuxième ligne est **NGGGNNGGGG**.



Solution : La grille complétée est présentée ci-contre. Il n'est pas efficace de tester toutes les possibilités de compléter les cases noires, il faut tenir compte de certaines positions de cases nécessairement noires. La grille à compléter comporte 10 cases par ligne et par colonne. Si on doit aligner par exemple 7 cases noires sur une ligne ou une colonne, les quatre cases centrales sont nécessairement noires. Si nous numérotons chaque case de la première à la dixième, les cases noires pourraient se trouver sur les cases 1/2/3/4/5/6/7 ou 2/3/4/5/6/7/8 ou 3/4/5/6/7/8/9 ou 4/5/6/7/8/9/10. On remarque que les cases 4, 5, 6 et 7 sont toujours noires. Ce raisonnement peut être prolongé dans le cas où une ligne ou une colonne présente des séries de cases noires, dont le total est 10 en tenant compte des cases grises intermédiaires. Ainsi, les huitième et neuvième lignes (4 | 5) peuvent être complétées directement, leur configuration est nécessairement NNNNGNNNNN.

Dans la grille à compléter, les huitième et neuvième lignes sont donc NNNNGNNNNN. Les deuxième, troisième et quatrième colonnes sont alors GG ?NNNNNN ? (le point d'interrogation indique qu'aucune certitude sur la nature de la case n'est avérée). La première colonne est ?NNN ??NNN ? compte tenu du nombre total de cases à colorier (huit noires et une grise, soit 9 sur 10). La troisième ligne est alors NNGGGGGGGG, la quatrième NNNNGGGGGG. Des cases grises peuvent également être complétées, par exemple les septième, huitième et neuvième colonnes : GGGGGG ?NN ?. De proche en proche, on parvient à compléter l'ensemble de la grille.

Remarque : une organisation logique suffit à compléter ces grilles, il faut également de la patience pour croiser toutes les informations présentes avant noircir une case.

Prolongement : de nombreux sites internet présentent ces jeux de grilles, appelés aussi picross. On peut citer l'adresse https://www.puzzle-nonograms.com/ avec d'autre jeux logiques de grilles.

2) Jeu de billes .... 4 ✸

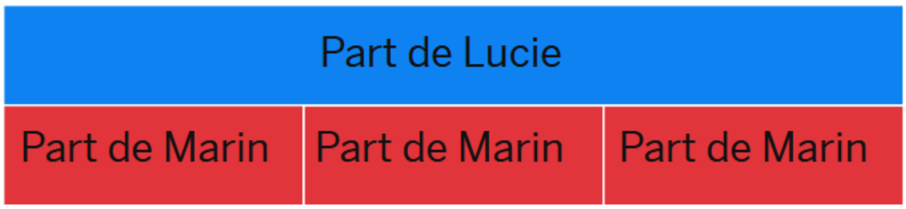
Lucie et Marin comparent leurs sachets de billes. Lucie a trois fois plus de billes que Marin mais si Lucie donnait cinq de ses billes à Marin, ils auraient le même nombre de billes ; si à l'inverse, Marin avait donné une de ses billes à Lucie, Lucie aurait quatre fois plus de billes que Marin.
Combien Lucie et Marin avaient-ils de billes au départ ?

Réponse : Lucie a **15 billes**, Marin a **5 billes**.

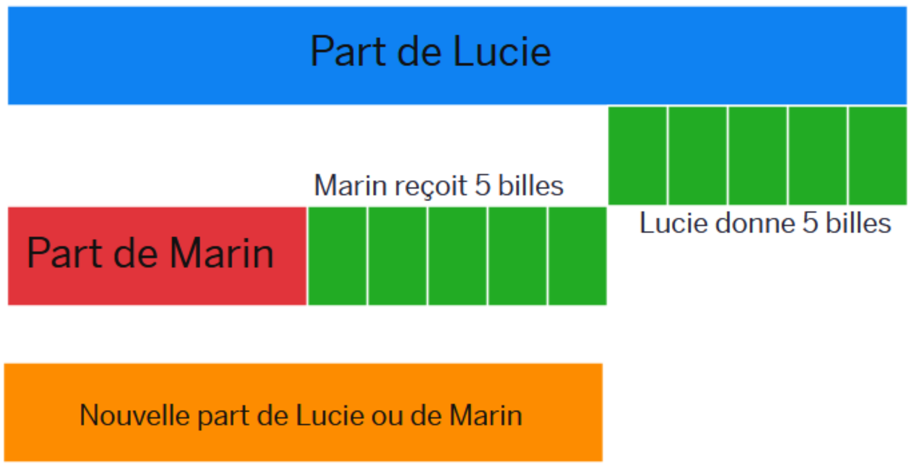
Solutions :

Procédure A, de nature arithmétique :

Lucie a trois fois plus de billes que Marin.



Si Lucie donnait cinq billes à Marin, ils auraient le même nombre de billes



En observant ces deux schémas en barre, on établit que deux parts de Marin correspondent à 10 billes. On en déduit que Marin a 5 billes et que Lucie en a le triple soit 15.
On peut raisonner sans recours au schéma. Lorsque l'on diminue le nombre de billes de Lucie de 5 et que l'on augmente celui de Marin de 5, on trouve le même nombre de billes : l'écart entre le nombre de billes de Lucie et celui de Marin est donc de 10.
Le nombre de billes de Marin est donc de 5 et celui de Lucie de 15.
On vérifie que si à l'inverse, Marin avait donné une de ses billes à Lucie, Lucie aurait quatre fois plus de billes que Marin (15 + 1 = 4 x (5 - 1).

Procédure B : Par tâtonnement, en appui sur la première contrainte :

x2 = x5

Si Marine a	Alors Lucas a	Lorsque Lucas donne 3 billes à Marine, Marine a	Et Lucas a	Si Marine donne 3 de ses billes à Lucas, Marine a	Et Lucas a
3 billes	6 billes.	3billes + 3 billes = 6 billes	6billes-3billes = 3billes		
4 billes	8 billes	4billes+3 billes =7 billes	8billes -3 billes = 5billes		
5billes	10 billes	5 billes + 3 billes = 8 billes	10 billes – 3billes = 7 billes		
6 billes	12 billes	6 billes + 3 billes = 9 billes	12 billes – 3 billes = 9billes	6billes-3billes = 3billes	12billes + 3 billes = 15 billes
7 billes	14 billes	7 billes + 3 billes = 10 billes	14 billes – 3 billes = 11billes		
8 billes	16 billes				

On réalise qu'entre les colonnes 3 et 4, l'écart entre le nombre de billes après cet échange de 3 billes, ne cesse de se creuser à nouveau après obtention de l'égalité.

Procédure C : Par tâtonnement en appui sur la 2e contrainte.
Le nombre de billes de Lucie auquel on en retire 5 est le même que le nombre de billes de Marin auquel on en ajoute 5. Donc l'écart de billes entre Lucie et Marin est de 10 billes.
On teste donc plus rapidement dans un même tableau que la procédure B, les couples des colonnes 3 et 4 suivants (1;11) ; (2;12); (3;13) ; (4;14) etc et on vérifie les autres contraintes.

Procédure D : Par tâtonnement en appui sur la 3e contrainte.
Le nombre de billes de Lucie auquel on en ajoute 1 est 4 fois plus grand que le nombre de billes de Marin auquel on en retire 1.
On teste donc plus rapidement dans un même tableau que la procédure B, les couples des colonnes 5 et 6 suivants (1;4) -> (M;L)=(2;3) ; (2;8) -> (M;L)=(3;7); (3; 12) -> (M;L)=(4;11) ; (4; 16) -> (M;L)=(5;15) etc et on vérifie les autres contraintes.

Remarques :

On notera l'efficience de la modélisation à l'aide de diagrammes en barres dans ce problème.

Deux informations (parmi les trois fournies dans l'énoncé) suffisent pour trouver une solution ; il faut toutefois vérifier qu'elle est bien satisfaite pour la solution trouvée.

Prolongements : cf. problème 2 de la manche 3 de 2017 et problème 4 de la manche 3 de 2024.

Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées

Cycle 3 : troisième manche (réponses)

du jeudi 13 mars 2025

IRES TOULOUSE

INSPE Institut national supérieur du professorat et de l'éducation Toulouse Occitanie-Pyrénées

3) Qui suis-je ? .... 6 ✸

Quel est le plus petit nombre entier à quatre chiffres dont la somme et le produit des chiffres valent tous deux 8 ?

Réponse : plus petit nombre naturel à quatre chiffres dont la somme et le produit des chiffres valent tous deux 8 est **1124**.

Solutions : Le produit n'est pas nul donc aucun des chiffres n'est 0.

La permutation des chiffres n'affecte ni leur somme ni leur produit ; pour avoir le plus petit nombre, on mettra donc les plus petits chiffres aux rangs de numération les plus grands.

Première méthode : les **décompositions multiplicatives** de 8 en quatre facteurs sont 1´1´1´8 ; 1´1´2´4 ; 1´2´2´2. Pour les trouver, on a commencé par choisir parmi les facteurs le plus de chiffres 1 (3) puis on a parcouru les cas possibles en diminuant le nombre de chiffres 1 dans la décomposition.

Seuls les nombres à quatre chiffres construits avec les chiffres 1, 1, 2 et 4 ont un produit ET une somme de leurs chiffres égales à 8 (en effet, $1 + 1 + 1 + 8 \neq 8$ et $1 + 2 + 2 + 2 \neq 7$) . Parmi ces nombres, le plus petit que l'on peut créer est le nombre 1 124. Afin d'obtenir le plus petit nombre, on a placé les chiffres 1 aux rangs les plus grands du nombre à quatre chiffres (millier et centaine) puis le 2 au rang des dizaines et enfin le 4 au rang des unités simples.

Deuxième méthode : les **décompositions additives** de 8 en quatre termes non nuls sont 1+1+1+5 ; 1+1+2+4 ; 1+1+3+3 ; 1+2+2+3 ; 2+2+2+2 ; en ordonnant les termes par ordre croissant, cela permet d'éviter les doublons. Parmi ces décompositions, une seule satisfait la contrainte du produit égal à 8, il s'agit de 1+1+2+4, d'où la seule solution pour le plus petit nombre satisfaisant toutes les contraintes, 1124.

Remarques :

- *. Il ne faut pas oublier 1 comme élément neutre de la multiplication dans les décompositions possibles.*
- *Remarquer que « Le produit n'est pas nul donc aucun des chiffres n'est 0 » permet de diminuer significativement les essais. On pouvait aussi remarquer que si le produit est 8, alors au moins un des chiffres est pair. Si la somme est 8 alors aucun des chiffres n'est 9. Si la somme est 8 et aucun des chiffres n'est 0, on peut en déduire que tous les chiffres sont compris entre 1 et 5 ce qui diminue significativement le nombre d'essais.*
- *On se confronte ici aux différents sens de l'égalité ; « le produit des quatre chiffres est 8 » est perçu par beaucoup comme le résultat de la multiplication est 8 (égalité perçue de façon non symétrique) alors que pour en déduire qu'aucun chiffre n'est nul, il faut penser « 8 est le produit des 4 chiffres ».*
- *Ce problème a quatre contraintes (nombre à 4 chiffres, le plus petit, la somme des chiffres vaut 8, le produit des chiffres vaut 8) ; choisir leur ordre de prise en compte amène des procédures de résolution différentes (parfois aux efficiences très différentes). On observe ici l'importance du travail de changements de représentations au sein d'un même registre (pour aller plus loin, cf. « formation », « traitement » et « conversion » de représentations selon Raymond Duval, 2006) ; ces transformations permettent d'appréhender certaines informations et/ou problèmes sous différents angles et ouvrent ainsi de multiples perspectives pour résoudre un même problème.*

Prolongement :

On peut chercher le plus grand nombre naturel sous les mêmes contraintes. En partant d'une décomposition, on peut aisément construire ses propres exemples.

Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées

Cycle 3 : troisième manche (réponses)

du jeudi 13 mars 2025

4) Le bon pavé .... 8 ✸

On a assemblé 70 cubes identiques d'arêtes 2 cm pour former un pavé droit posé sur une table. Le périmètre de la base est 48 cm. Quelle est la hauteur de ce pavé droit ?
Réponse : **La hauteur du pavé est 4 cm (ou 2 côtés de cubes)**

Solution :

À l'aide de cubes :

- en construisant des pavés droits avec 70 cubes, on teste toutes les possibilités : en nombre de cubes sur chaque dimension du pavé, on obtient avec un seul étage de cubes (1×1×70), (1×2×35), (1×5×14), (1×7×10) ; avec deux étages de cubes (soit 35 cubes par étages) (2×1×35)=(1×2×35), (2×5×7) ; impossible avec 3 ou 4 étages ; avec 5 étages ou plus, on retrouve les possibilités précédentes en basculant le pavé droit.

Pour chaque pavé on teste la contrainte du périmètre de la base et on trouve une seule solution, 2×5×7 cubes, donc une hauteur de 2 cubes soit 4 cm.

- En assemblant des cubes, on essaie de faire des « rectangles » de périmètre 48 cm, donc de demi-périmètre de 24 cm. Les cubes ayant pour arête 2 cm, la longueur et la largeur sont des nombres pairs de cm. Reste donc à tester (2 ; 22) -> (1×11 cubes sur chaque étage), (4 ; 20) -> (2×10 cubes sur chaque étage), (6 ; 18) -> (3×9 cubes sur chaque étage) ; (8 ; 16) -> (4×8 cubes sur chaque étage), (10 ; 14) -> (5×7 cubes sur chaque étage), (12 ; 12) -> (6×6 cubes sur chaque étage) … Avec 70 cubes, on ne peut compléter le pavé qu'avec 5×7 cubes sur chaque étage, soit 35 cubes par étage donc deux étages avec 70 cubes 5oit une hauteur de 4 cm (2×2 cm).

En raisonnant sur les mesures en cm des longueurs :

Si on se rappelle qu'un pavé droit possède trois dimensions on recherche comment écrire 70 comme produit de trois nombres. Si on note pour le pavé droit la largeur (l),la longueur (L) et la hauteur (h), la somme L + l doit être égale à 24 cm (le demi-périmètre de la base). Comme chaque cube a pour arête 2 cm, la somme du nombre de cubes sur la longueur et la largeur doit être égale à 12.

On peut chercher à la main les triplets de nombres dont la somme de deux d'entre eux est égale à 12 et dont le produit des trois est égal à 70. On peut aussi faire effectuer les calculs par un tableur comme ci-dessous.

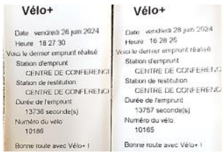
On trouve une unique solution pour le nombre de cubes sur la hauteur : 2. Autrement dit la hauteur du pavé est égale à 4 cm.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	nombre de cubes sur largeur	nombre de cubes sur la longueur	nombre de cubes sur hauteur	périmètre base			nombre de cubes sur largeur		nombre de cubes sur la longueur		nombre de cubes sur hauteur		périmètre base	
2	1	11	6.363636364	48			1		=12-A2		=70/(A2*B2)		=(A2*2+B2*2)*2	
3	2	10	3.5	48			2		=12-A3		=70/(A3*B3)		=(A3*2+B3*2)*2	
4	3	9	2.592592593	48			3		=12-A4		=70/(A4*B4)		=(A4*2+B4*2)*2	
5	4	8	2.1875	48			4		=12-A5		=70/(A5*B5)		=(A5*2+B5*2)*2	
6	5	7	2	48			5		=12-A6		=70/(A6*B6)		=(A6*2+B6*2)*2	
7	6	6	1.944444444	48			6		=12-A7		=70/(A7*B7)		=(A7*2+B7*2)*2	

Remarques : Ce problème s'appuyant sur un contexte de cubes est en fait un problème de dénombrement.

Prolongements : combien de pavés droits différents peut-on faire avec 70 cubes ? avec 60 cubes ?

5) Quelle famille ! ....10 ✸



Tim et Lola ont emprunté chacun un vélo à Orléans. Ils récupèrent leur ticket de paiement à l'issue de leur après-midi en balade.
On fournit ci-contre les règles du tarif à payer en fonction de la durée d'emprunt. Combien de temps pouvait-on encore emprunter le vélo 10186 avec la formule Abonnement Vélo+ 1 journée sans modifier le coût ?

Réponse : avec la formule Abonnement Vélo+ 1 journée, on pouvait encore emprunter le vélo 10 186 sans modifier le coût pendant **11 minutes et 4 secondes**. (On acceptera 11 min 3s).

Solution :

13 736 s = 3 × 3600 s + 48 × 60 s + 56 s = 3 h 48 min 56 s

Le vélo 10186 a été emprunté durant 3h 48 min 56 s. Le tarif est augmenté de 0,50 € toutes les demi-heures. La prochaine augmentation aura donc lieu à la quatrième heure d'emprunt. Le vélo 10 186 pourra donc encore rouler 11 min 4 s

Remarques : Il est peu habituel de trouver des durées exprimées en secondes comme sur ce ticket d'emprunt de vélo. On profite de cette situation de la vie courante (emprunt d'un vélo dans la ville d'Orléans) pour justifier le travail sur les conversions de durée.

Prolongements :
Quel est le numéro du vélo qui a été emprunté le plus tôt dans l'après-midi ? Quel a été le prix payé par le vélo 10 186 ? Questions sur l'autre vélo.

6) Le bon code ....12 ✸

Énigme 1 : Nathalie mène l'enquête

Un vase a été cassé par un des quatre enfants qui jouaient dans le salon. Jonathan qui porte des lunettes, dit : « c'est une fille ! ». Aude qui ne porte pas de lunettes : « ce n'est pas moi ! ». Léa qui porte des lunettes : « c'est quelqu'un qui ne porte pas de lunettes ! ». Pascal qui n'a pas de lunettes : « c'est quelqu'un qui porte des lunettes ! ». Un seul enfant a menti. Les trois autres ont dit la vérité. Qui a cassé le vase ?

Réponse : **Léa** a cassé le vase.

Solutions :

Les affirmations de Léa et de Pascal sont incompatibles, donc le menteur est nécessairement l'un des deux et Jonathan et Aude disent nécessairement la vérité, donc le casseur est une fille qui n'est pas Aude ; c'est donc nécessairement Léa (seule autre fille) qui a cassé le vase.

On peut vérifier ensuite que c'est aussi Léa qui ment et que Pascal dit bien la vérité puisque Léa porte des lunettes.

Remarques : C'est un problème de logique dont la difficulté repose sur la recherche de proposition fausse parmi des affirmations qui peuvent être fausses.

Cette recherche est l'occasion d'amener les élèves à exploiter les implicites de chaque information dans un problème, notamment en reformulant négativement une affirmation ou affirmativement une négation. Ce traitement amenant les élèves à changer de point de vue (tel si tel enfant ment, alors les trois autres disent nécessairement la vérité, si c'est une fille alors ce n'est pas un garçon...).

Dans ce problème, plusieurs propriétés sont à prendre en compte : être une fille ou un garçon, porter ou pas des lunettes, dire ou non la vérité, avoir ou non cassé le vase.

Les informations ne sont pas nécessairement à prendre dans leur ordre de présentation dans l'énoncé.

Prolongements : on peut se plonger dans les archives du Rallye avec par exemple le problème 5 de la deuxième manche 2014 ou la première manche 2017 ou deuxième manche 2019...

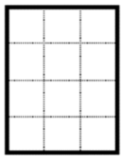
Rallye mathématique sans frontière Occitanie-Pyrénées

Cycle 3 : troisième manche (réponses)

du jeudi 13 mars 2025

Énigme 2 : bi-puzzle

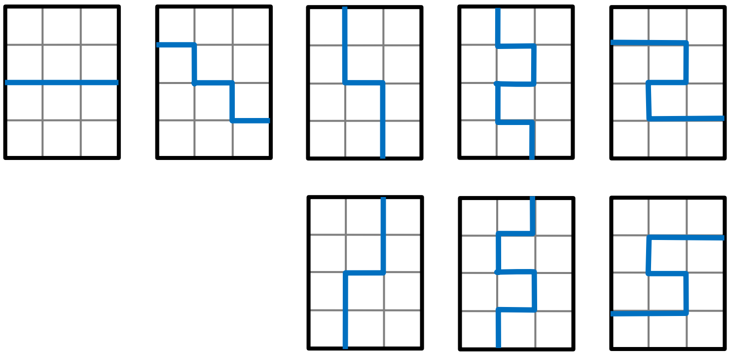
De combien de façons peut-on partager ce rectangle en 2 pièces superposables tout en suivant le quadrillage (deux façons sont différentes si les pièces obtenues par chacune d'elles ne sont pas superposables).



Réponse : il y a **8 façons** (ou **5 façons** si on accepte de retourner les pièces) de partager ce rectangle en 2 pièces superposables tout en suivant le quadrillage.

Solution : On peut procéder par tâtonnement au départ puis explorer méthodiquement les possibilités ; il y a dix départs (et arrivées) possibles pour la ligne de partage en suivant les lignes du quadrillage.

Ci-dessous les différentes façons de de partager ce rectangle en 2 pièces superposables tout en suivant le quadrillage.



Remarques : À noter que 6 de ces découpages sont symétriques 2 à 2. Parmi eux, les pièces des découpages de dessous ne sont superposables aux pièces des découpages de dessus qu'après retournements.

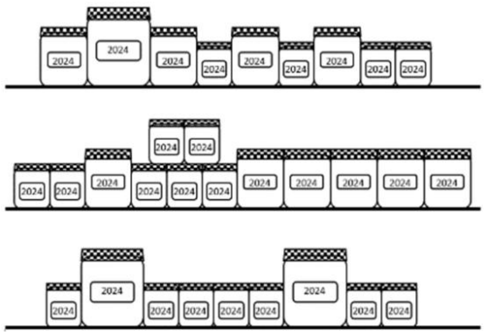
Dans ce problème la notion mathématique sous-jacente est la notion de centre de symétrie et la prégnance des axes de symétrie du rectangle peut masquer d'autres possibles pour les élèves et entraver leur recherche.

Prolongements :

Parmi ces découpages, lesquels ont un axe de symétrie ?

Énigme 3 : Confitures

J'ai fait plein de pots de confiture, des petits, des moyens et des grands. Je les ai rangés sur 3 rayons en m'arrangeant pour qu'il y ait exactement 5 kg sur chaque rayon. Combien pèse chaque petit, chaque moyen et chaque grand pot ?



Réponse : un grand pot pèse **1800 g**.

Solution :

4 petits, 4 moyens et 1 grand pèsent 5 kg.

7 petits et 6 moyens pèsent 5 kg.

7 petits et 2 grands pèsent 5 kg.

De ces deux derniers rayons, on peut conclure que 6 moyens pèsent comme 2 grands, donc 3 moyens pèsent comme 1 grand.

Donc dans les deux premiers rayons, 4 petits et 7 moyens pèsent comme 7 petits et 6 moyens donc 3 petits pèsent comme 1 moyen.

Donc 25 petits pèsent 5 kg (deuxième rayon).

On en déduit qu'un petit pèse 200 g, un moyen 600 g et un grand 1800 g.

Remarque : des problèmes complexes à plusieurs étapes permettent de travailler significativement toutes les compétences fondamentales en mathématiques et tout particulièrement les compétences « chercher » et « raisonner ».

Prolongements : on peut se plonger dans les archives du Rallye avec par exemple le problème 4 de la manche 2 du rallye 2020.

Le nombre de centaines de la masse en gramme d'un grand pot de confiture est le nombre de centaines du code. Le nombre de lettres du prénom de l'enfant qui a cassé le vase s'écrit avec le chiffre des dizaines du code. Le chiffre des unités du nombre de façons de découper le rectangle en 2 pièces superposables tout en suivant le quadrillage est le même que celui du code. Quel est ce code ?

Réponse : le bon code est **1835 (ou 1838)**.

Réponse : un grand pot pèse 1800 g, le nombre de centaines est 18 ; le prénom de Léa qui a cassé le vase s'écrit avec trois lettres (3 est donc le chiffre des dizaines du code) et il y a cinq (ou huit) façons de découper le rectangle, donc le chiffre des unités du code est 5 ou 8.

Remarque : Les exercices du type le bon code peuvent inciter à davantage de coopération entre élèves et groupes au sein de la classe. Après deux manches, les élèves doivent être habitués à se partager les recherches et à intégrer les réponses des différentes énigmes.

N'hésitez pas à nous faire part, de vos témoignages sur l'organisation du rallye dans votre classe, sur certaines réactions d'élèves, sur vos motivations d'enseignant à proposer le rallye mathématique à votre classe… Pour cela vous pouvez le faire directement sur :

https://enquetes.univ-tlse2.fr/index.php/576985?lang=fr